Existence globale de solutions faibles pour un système parabolique-hyperbolique intervenant en dynamique des milieux poreux

Youcef Amirat
Laboratoire de Mathématiques
Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS

Kamel Hamdache
École Polytechnique et CNRS

Abdelhamid Ziani
Département de Mathématiques, Université de Nantes

27ème congrès d'analyse numérique, Mini symposium Milieux poreux
Super-Besse, 1995

Introduction et formulation du problème

On étudie l'écoulement de deux fluides miscibles et compressibles en milieu poreux, en absence de diffusion moléculaire et de dispersion. On suppose que la viscosité du mélange, la perméabilité et la porosité sont constantes, égales à 1. Soit u la concentration du mélange, q le débit et p la pression. Le modèle est alors décrit, voir Peaceman [4], par les équations suivantes :

$$a(u)\,\partial_t p + \operatorname{div} q = 0, \quad q = -\nabla p, \quad q \cdot \nu\,|_{\Gamma_T} = 0, \quad p(x,0) = p_0(x), \tag{1}$$

$$\partial_t u + q \cdot \nabla u + b(u)\,\partial_t p = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

pour $x \in \Omega$, $t \in (0, T)$, Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, simplement connexe, de frontière $\Gamma = \partial\Omega$ régulière et $T > 0$ fixé. On note $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ et ν la normale unitaire extérieure à Ω.
Les fonctions a et b sont données par :

$$a(u) = u\,(z_1 - z_2) + z_2, \quad b(u) = (z_1 - z_2)\,u\,(1-u), \text{ pour } 0 \le u \le 1,$$

où les constantes z_1 et z_2 désignent les facteurs de compressiblité de chacun des deux fluides. Le système est couplé non linéaire. Pour des raisons techniques, on étend la fonction a par z_1 pour $u \ge 1$ et z_2 si $u \le 0$; La fonction b est pronlongée par 0 en dehors de $(0, 1)$.

On suppose dans toute la suite que les données initiales vérifient $p_0 \in H^1(\Omega)$ et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $0 \leq u_0 \leq 1$ p.p. dans Ω. L'analyse du cas 1-D est faite dans Amirat et Moussaoui [1].

Définition. *On dira que le triplet* (p, q, u) *est une solution faible du problème* (1), (2) *si :*

(i) $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ *et* $q \in (L^2(0, T; H^1(\Omega)))^3$ *avec* p *satisfaisant (1) ;*

(ii) $u \in L^\infty(\Omega_T)$, $0 \leq u(x, t) \leq 1$ *pour presque tout* $(x, t) \in \Omega_T$, *satisfaisant*

$$\int_{\Omega_T} (u\, \partial_t \varphi + u\ div(q\, \varphi) - b(u)\, \partial_t p\, \varphi)\, dxdt = -\int_\Omega u_0(x)\, \varphi(x, 0)\, dx \quad (3)$$

pour toute fonction φ *dans* $C_0^1(\overline{\Omega}_T)$ *à support dans inclus dans* $\overline{\Omega} \times [0, T[$.

Nous étudions l'existence d'une solution faible (p, q, u) au sens de la définition précédente. La méthode repose sur une approximation de l'équation (2) par une équation avec faible diffusion. Des estimations et un argument de compacité par compensation, voir Murat [4] et Tartar [6], permettent de conclure.

Existence de solution et estimations

Soit $\varepsilon > 0$ donné, on considère le problème avec diffusion :

$$a(u^\varepsilon)\,\partial_t p^\varepsilon + \operatorname{div} q^\varepsilon = 0, \quad q^\varepsilon = -\nabla p^\varepsilon, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$
$$q^\varepsilon \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad p^\varepsilon(x,0) = p_0(x), \tag{4}$$

$$\partial_t u^\varepsilon + q^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + b(u^\varepsilon)\,\partial_t p^\varepsilon - \varepsilon\,\Delta u^\varepsilon = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T,$$
$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu} \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad u^\varepsilon(x,0) = u_0(x). \tag{5}$$

Théorème. *Le problème (4), (5) admet une solution $(p^\varepsilon, q^\varepsilon, u^\varepsilon)$ satisfaisant :*

(i) $p^\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ *et* $q^\varepsilon \in (L^2(0,T;H^1(\Omega)))^3$ *définies par (4),*

(ii) $u^\varepsilon \in L^\infty(\Omega_T)$, $0 \le u^\varepsilon(x,t) \le 1$ *p.p.* $(x,t) \in \Omega_T$, *satisfaisant (5).*

La démonstration repose sur le théorème du point fixe de Schauder. Soit $\mathcal{K}$ le convexe fermé de $L^2(\Omega_T)$ défini par :

$$\mathcal{K} = \{v,\ v \in L^2(\Omega_T)\ ;\ 0 \le v(x,t) \le 1 \text{ p.p. dans } \Omega_T\}.$$

Pour $\eta > 0$, on définit une application T_η comme suit :
à toute fonction u de $\mathcal{K}$, on associe le couple $(p^\varepsilon, q^\varepsilon)$ défini par (4).
On régularise q^ε et $\partial_t p^\varepsilon$ respectivement par $\tilde{q}^\varepsilon_\eta$ et $\partial_t \tilde{p}^\varepsilon_\eta$:
après prolongement à $\mathbb{R}^4$, on définit $\tilde{q}^\varepsilon_\eta = \rho_\eta * q^\varepsilon$, $\tilde{p}^\varepsilon_\eta = \rho_\eta * p^\varepsilon$ avec
$\rho_\eta(x,t) = \dfrac{1}{\eta^4}\,\rho\left(\dfrac{x}{\eta}, \dfrac{t}{\eta}\right)$ où $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$, $\rho \geq 0$ à support dans la boule unité et
$\int_{\mathbb{R}^4} \rho(x,t)\, dx\, dt = 1$.
On note de la même façon les restrictions à Ω_T de ces fonctions. On a :
$\tilde{q}^\varepsilon_\eta \in (C^0(\Omega_T))^3$, $\partial_t \tilde{p}^\varepsilon_\eta \in C^0(\Omega_T)$,

$$\tilde{q}^\varepsilon_\eta \to q^\varepsilon, \quad \partial_t \tilde{p}^\varepsilon_\eta \to \partial_t p^\varepsilon \text{ fortement dans } (L^2(\Omega_T))^3,$$

(resp. $L^2(\Omega_T)$) quand $\eta \to 0$.
On définit alors w^ε_η comme la solution de l'équation

$$\partial_t w^\varepsilon_\eta + \tilde{q}^\varepsilon_\eta \cdot \nabla w^\varepsilon_\eta + b(w^\varepsilon_\eta)\, \partial_t \tilde{p}^\varepsilon_\eta - \varepsilon\, \Delta w^\varepsilon_\eta = 0,$$

satisfaisant les conditions aux limites et initiale (5).

On établit la proposition suivante.

Proposition. *On a :*

(i) *Les suites* (p_η^ε) *et* (q_η^ε) *sont unifomément bornées, par rapport à* η *et* ε*, respectivement dans* $L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ *et* $(L^2(0, T; H^1(\Omega)))^3$ *;*

(ii) $w_\eta^\varepsilon \in L^\infty(\Omega_T)$*,* $0 \leq w_\eta^\varepsilon(x, t) \leq 1$ *p.p.* $(x, t) \in \Omega_T$ *;*

(iii) $\sqrt{\varepsilon}\, \nabla w_\eta^\varepsilon$ *borné dans* $(L^2(\Omega_T))^3$ *et* $\partial_t w_\eta^\varepsilon$ *borné dans* $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$*.*

On montre que l'application $T_\eta : \mathcal{K} \mapsto \mathcal{K}$ ainsi définie est continue à image précompacte. On note u_η^ε le point fixe et $(p_\eta^\varepsilon, q_\eta^\varepsilon)$ la solution de (4) associée à u_η^ε. On construit alors une solution faible $(p^\varepsilon, q^\varepsilon, u^\varepsilon)$ comme la limite quand $\eta \to 0$ d'une suite de points fixes $(p_\eta^\varepsilon, q_\eta^\varepsilon, u_\eta^\varepsilon)$.

Remarque. L'opérateur de régularisation permet d'établir la relation naturelle pour une concentration $0 \leq w_\eta^\varepsilon \leq 1$*, indépendamment de la norme* $L^\infty(\Omega_T)$ *de* q^ε *et* $\partial_t p^\varepsilon$*. L'existence de la solution* w_η^ε *de (5) se déduit de DiPerna et Lions [3].*

Les propriétés de convergence forte de (q_η^ε), $(\partial_t p_\eta^\varepsilon)$ et la convergence presque partout d'une suite extraite (w_η^ε) permettent de passer à la limite quand $\eta \to 0$.

Passage à la limite quand ε tend vers 0

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, le problème (1), (2) possède une solution faible au sens de la définition ci-dessus.*

Un calcul simple montre que le système (4), (5) est équivalent au système où on remplace l'équation (5) par l'équation conservative suivante :

$$\partial_t(u^\varepsilon - \alpha\, p^\varepsilon) + \mathrm{div}(q^\varepsilon(u^\varepsilon - \beta)) - \varepsilon\, \Delta u^\varepsilon = 0, \tag{6}$$

où $\alpha = z_1\, z_2/(z_1 - z_2)$ et $\beta = z_1/(z_1 - z_2)$.

Remarque. La formulation (6) a été introduite dans [2] et utilisée pour l'homogénéisation du système 1-D quand la perméabilité et la porosité du milieu sont des fonctions fortement oscillantes.

La fonction q^ε est solution du problème :

$$\partial_t q^\varepsilon - \nabla\left(\frac{1}{a(u^\varepsilon)}\,\mathrm{div}\, q^\varepsilon\right) = 0, \quad q^\varepsilon \cdot \nu\,|_{\Gamma_T} = 0, \quad q^\varepsilon(x,0) = -\nabla p_0. \tag{7}$$

Comme $\mathrm{rot}\; q^\varepsilon = 0$, on déduit que les suites (q^ε) et $(\partial_t q^\varepsilon)$ sont bornées respectivement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ et $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$; donc (q^ε) est sequentiellement compacte dans $L^2(\Omega_T)$.

Soient p et q les limites (fortes) respectives de (p^ε) et (q^ε). Le passage à la limite dans (6) est alors immédiat. Le manque de compacité de (u^ε) ne permet pas le passage passage à la limite dans l'équation (4) directement. On applique le Lemme Div-Rot de Murat et Tartar [4,6] comme suit :

Soient (A^ε) et (B^ε) les suites de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ données par

$$A^\varepsilon = (u^\varepsilon, q^\varepsilon\, u^\varepsilon - \varepsilon \nabla u^\varepsilon), \quad B^\varepsilon = \left(\frac{1}{a(u^\varepsilon)} \operatorname{div} q^\varepsilon, q^\varepsilon \right).$$

On a $\operatorname{div}_{t,x} A^\varepsilon = \alpha\, \partial_t p^\varepsilon + \beta \operatorname{div} q^\varepsilon$ borné dans $L^2(\Omega_T)$ et en utilisant l'équation (7) on déduit $\mathrm{rot}\;_{t,x} B^\varepsilon = 0$.

Alors

$$\langle A^\varepsilon, B^\varepsilon \rangle = \frac{u^\varepsilon}{a(u^\varepsilon)} \operatorname{div} q^\varepsilon (q^\varepsilon)^2\, u^\varepsilon - \varepsilon\, q^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \langle A, B \rangle \text{ au sens des distributions,}$$

avec $\langle A, B \rangle = u\, r + q^2\, u$ où r est la limite faible de $\left(\dfrac{1}{a(u^\varepsilon)} \operatorname{div} q^\varepsilon \right)$.

En utilisant la décomposition

$$\frac{u^\varepsilon}{a(u^\varepsilon)}\,\mathrm{div}\,q^\varepsilon = \frac{1}{z_1 - z_2}\,\mathrm{div}\,q^\varepsilon - \alpha\,\frac{1}{a(u^\varepsilon)}\,\mathrm{div}\,q^\varepsilon,$$

on obtient

$$\frac{u^\varepsilon}{a(u^\varepsilon)}\,\mathrm{div}\,q^\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{z_1 - z_2}\,\mathrm{div}\,q - \alpha\,r \text{ dans } L^2(\Omega_T) \text{ faible.}$$

Ce qui donne par identification $\dfrac{1}{z_1 - z_2}\,\mathrm{div}\,q - \alpha\,r = u\,r$ et donc $r = \dfrac{1}{a(u)}\,\mathrm{div}\,q$. On montre alors que les limites p et q des suites (p^ε) et (q^ε) satisfont (1). Par passage à la limite dans (6), on déduit que u vérifie

$$\partial_t(u - \alpha\,p) + \mathrm{div}(q\,(u - \beta)) = 0,$$

ce qui redonne (2) en utilisant (1). D'où le théorème précédent.

Références.

1. Y. Amirat and M. Moussaoui, Analysis of a one-dimensional model for compressible miscible displacement in porous media, SIAM J. Math. Anal., à paraître 1994.
2. Y. Amirat, K. Hamdache and A. Ziani, Homogenization for a one-dimensional model for compressible miscible displacement in porous media, à paraître.
3. R.J DiPerna and P.L. Lions, Ordinary differential equation, transport theory and Sobolev spaces, Invent. math., 98, 1989, 511-542.
4. F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 5, 1978, 489-507.
5. D.W. Peaceman, Fundamentals of numerical reservoir simulation, Elsevier, N.Y., 1977.
6. L. Tartar, Compensated compactness and applications to P.D.E., Non Linear Analysis and Mechanics, Heriot-Watt Symposium 4(39), Research Notes in Math. ed. R.J. Knops, Pitman Press, 1979, 136-212.