



Analyse et approximation d'écoulements en milieu poreux n'obeissant pas a la loi de Darcy

Y. Amirat

► **To cite this version:**

Y. Amirat. Analyse et approximation d'écoulements en milieu poreux n'obeissant pas a la loi de Darcy. RR-0435, INRIA. 1985. <inria-00076121>

HAL Id: inria-00076121

<https://hal.inria.fr/inria-00076121>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

IRIA

CENTRE DE ROCQUENCOURT

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél. (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 435

ANALYSE ET APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS EN MILIEU POREUX N'OBÉISSANT PAS À LA LOI DE DARCY

Youcef AMIRAT

Juillet 1985

ANALYSE ET APPROXIMATION D'ÉCOULEMENTS

EN MILIEU POREUX N'OBEISSANT PAS

A LA LOI DE DARCY

Yucef AMIRAT

RESUME

L'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux, qu'on suppose régi par une loi quadratique de perte de charge, est modélisé en régime transitoire par un problème parabolique non linéaire. Dans une première partie on établit des résultats d'existence et d'unicité. On étudie aussi le comportement des solutions quand le paramètre de résistance inertielle tend vers zéro. Dans une deuxième partie on étudie l'approximation par éléments finis et la résolution numérique par une technique de lagrangien augmenté. Des résultats numériques de simulation d'un modèle radial circulaire sont présentés.

ABSTRACT

This paper deals with the study of a transient gas flow through a porous medium, with a quadratic pressure drop law, governed by a nonlinear parabolic equation. In a first part, existence and uniqueness results are established. The behaviour of the solutions when the inertial flow resistance coefficient tends to zero is also considered. In a second part, the problem is discretized by a finite element method and solved by an augmented lagrangian technique. Numerical results for a radial flow are given.

MOTS CLES

Equation des milieux poreux - Méthode de monotonie - Éléments finis - Méthode de lagrangien augmenté.

KEY WORDS

Porous media equation - Monotonicity method - Finite elements - Augmented lagrangian method.



SOMMAIRE

	Pages
<u>INTRODUCTION</u>	1
1 - <u>LE PROBLEME PHYSIQUE</u>	3
1.1 - Position du problème	3
1.2 - Hypothèses et formulation mathématique du problème	7
2 - <u>RESULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITE ET DE REGULARITE POUR POUR LE PROBLEME (\mathcal{P})</u>	11
2.1 - Existence d'une solution faible	13
2.2 - Régularité de la solution faible	22
2.3 - Un résultat d'unicité	24
2.4 - Un cas d'existence et d'unicité d'une solution positive du problème (\mathcal{P}).....	26
3 - <u>RESULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITE ET DE REGULARITE POUR LE PROBLEME (\mathcal{P}_0)</u>	31
4 - <u>LIMITE QUAND σ TEND VERS 0</u>	35
5 - <u>APPROXIMATION ET RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME (\mathcal{P})</u>	49
5.1 - Approximation par éléments finis du problème (5.4)	50
5.2 - Résolution numérique du problème discret (5.7)	56
5.3 - Résolution numérique du problème d'évolution (5.1), (5.2)	65
5.4 - Résultats numériques	66
<u>ANNEXE</u>	A1
<u>REFERENCES</u>	81

INTRODUCTION

On considère le problème parabolique non linéaire

$$(0.1) \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

avec

$$F(\nabla u) = K \frac{(1 + \sigma |\nabla u|)^{1/2} - 1}{\sigma |\nabla u|} \nabla u$$

$$(0.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(0.3) \quad F(\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[$$

où Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^d de frontière Γ régulière, ν est la normale unitaire sortante de Ω , ϕ , K , σ , u_0 sont des fonctions données dans Ω et g est une fonction donnée sur $\Gamma \times]0, T[$.

Ce problème modélise, dans certaines conditions, l'écoulement d'un gaz à travers un milieu poreux, en régime visco-inertiel, u désignant alors le carré de la pression. Les lois de base pour l'établissement du modèle sont : la loi de conservation de la masse, la loi quadratique de perte de charge (généralisant celle de Darcy) et la loi d'état des gaz parfaits isotherme (cf. paragraphe 1). Remarquons que si σ est nulle alors (0.1) coïncide avec l'équation des milieux poreux (dans le cas isotherme); l'équation des milieux poreux et, plus généralement, les équations paraboliques non linéaires dégénérées du type $u_t - \Delta \phi(u) = 0$ ont été étudiées par de nombreux auteurs (cf. par exemple [18], [19], [20] et la bibliographie de ces travaux). Nous nous intéressons ici, au cas où σ est positive, cas dont l'étude présente un intérêt pratique dans l'exploitation des gisements de gaz.

La première partie de ce rapport concerne l'étude mathématique du problème (0.1), (0.2), (0.3). Moyennant des hypothèses convenables sur les données, on montre l'existence d'une solution en utilisant une technique développée dans [21]. On établit un résultat d'unicité dans une classe de fonctions régulières et, pour des données (u_0 et g) positives on obtient l'existence d'une solution positive et l'unicité. On étudie, de plus, le

comportement des solutions quand σ tend vers 0; pour cela, nous établissons des estimations qui tiennent compte du changement de comportement de la fonction F au voisinage de 0.

La seconde partie est consacrée à l'approximation et la résolution numérique du problème (0.1), (0.2), (0.3). Après semi discrétisation en temps par un schéma implicite, nous avons à chaque pas de temps un problème elliptique non linéaire à résoudre, les non linéarités portant à la fois sur u et Vu . On utilise une approximation par éléments finis; on montre la convergence des solutions approchées et on établit une estimation de l'erreur d'approximation. Les problèmes approchés sont résolus par une méthode de lagrangien augmenté [26]. Cette méthode est particulièrement intéressante puisque, d'une part les non linéarités deviennent locales et résolubles explicitement, et d'autre part elle permet le calcul simultané des grandeurs physiques pression et débit massique. Pour conclure nous présentons quelques résultats numériques de simulation d'un modèle radial circulaire.

1 - LE PROBLEME PHYSIQUE

L'expérience montre que la perte de charge subie par un liquide traversant un milieu poreux est très généralement proportionnelle à la vitesse d'écoulement du liquide : c'est là l'énoncé de la loi bien connue de Darcy ([1]).

Par contre, on constate que la perte de charge subie par un gaz croît beaucoup plus rapidement que la vitesse d'écoulement du gaz ([2], [3]). Des écarts entre les résultats expérimentaux et ceux qui pourraient être déduits de l'application de la loi de Darcy sont souvent observés dans la pratique de l'exploitation des gisements de gaz. Les résultats obtenus aux puits à gaz montrent aussi que la loi de Darcy n'est pas valable, même pour des débits relativement réduits, lorsque le milieu poreux présente des fissures c'est-à-dire de grands espaces d'écoulement ([4],[5]). L'écoulement est dit visco-inertiel (ou non darcéen ou parfois "turbulent" [6]); la loi appropriée de variation de la pression doit tenir compte non seulement de la résistance visqueuse mais aussi des pertes d'énergie cinétique ([3], [7], [8]).

On s'intéresse ici à l'écoulement transitoire de gaz en milieu poreux, en régime visco-inertiel. L'intérêt, pour l'exploitation des gisements, est le calcul des pertes de charge aux puits. Signalons que les problèmes inhérents à ce type d'écoulement ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux en simulation numérique ([9], [10], [11], [12], [13] et la bibliographie de ces travaux).

1.1 - POSITION DU PROBLEME

Soient Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^d , $1 \leq d \leq 3$, figurant le gisement, de frontière régulière Γ , de vecteur normal extérieur ν et $]0, T[$ l'intervalle de temps d'étude du phénomène.

On adopte les notations habituelles suivantes :

k	perméabilités du milieu poreux
ϕ	porosité de la roche
T_a	température absolue
M	masse molaire
R	constante universelle des gaz
μ	viscosité dynamique du gaz
p	pression
p_0	pression à l'instant initial
ρ	masse spécifique
q	débit massique unitaire
Q_i	débit massique au puits numéro i
α	facteur de résistance visqueuse
β	facteur de résistance inertielle
Z	facteur de compressibilité du gaz.

L'écoulement du gaz dans le milieu poreux, supposé isotrope, est régi par les équations et conditions suivantes :

équation de continuité

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \operatorname{div} q = 0 \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

équation de Forchheimer ([14], [15], [16]).

$$(1.2) \quad -\rho \nabla p = \alpha \mu q + \beta q |q| \quad \text{dans } Q$$

où α et β ne dépendent que de la nature du milieu poreux traversé. α a pour dimension L^{-2} et β a pour dimension L^{-1} .

De nombreuses mesures effectuées en laboratoire ont apporté la preuve expérimentale de l'exactitude de la loi (1.2) (cf. [2], [3], [4] et la bibliographie de ces travaux). Ces mesures concernant des écoulements

liquides et gazeux dans des milieux poreux naturels et artificiels ont permis de montrer que α et β sont spécifiques du milieu et de vérifier que α est approximativement égal à $\frac{1}{k}$. Il s'avère ainsi que la loi de Darcy n'est en réalité qu'une expression approchée de la forme quadratique plus générale; toutefois, la loi de Darcy est généralement suffisante pour régir l'écoulement des liquides, la viscosité μ étant plus élevée (au moins dix fois plus que celle des gaz) et le débit massique toujours modéré (dix à cent fois plus petit que celui d'un écoulement gazeux), si bien que le terme d'écart par rapport à la loi de Darcy, $\beta \frac{k}{\mu} q$, correspondant à un écoulement liquide est au moins cent à mille fois plus petit que celui correspondant à un écoulement gazeux.

Notons cependant que les diagrammes de variation de β en fonction ϕ et de k ont donné lieu à diverses formes empiriques pour β [6] -certaines faisant intervenir aussi le diamètre moyen des pores- et les calculs de pertes de charges aux puits [4] utilisant ces formules de β ne semblent pas toujours satisfaisants.

équation d'état

Elle est souvent donnée sous la forme :

$$(1.3) \quad \rho = \frac{M}{RT_a} \frac{p}{Z} \quad \text{dans } Q.$$

L'écoulement étant pratiquement isotherme, le facteur de compressibilité n'est fonction que de la pression (on trouve dans [17] un diagramme des courbes de $Z(p)$ pour différentes valeurs de la température).

condition initiale

A l'instant initial, la pression est supposée connue dans tout le gisement, soit

$$(1.4) \quad p(x,0) = p_0(x)$$

condition aux limites

A la limite intérieure $\Gamma_{\text{int}} (= \bigcup_{i=1}^{N_p} G_i)$ du domaine Ω , constituée par les surfaces Γ_i des N_p puits exploitant le gisement, le débit est imposé en fonction du temps, soit

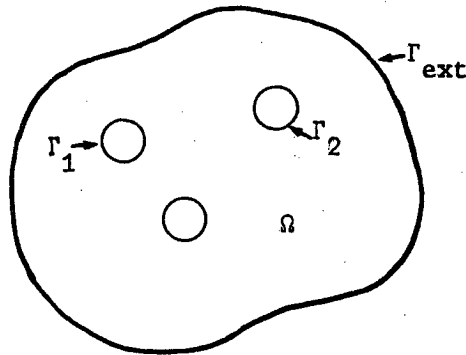


Figure 1.1

$$\Gamma = \Gamma_{\text{int}} \cup \Gamma_{\text{ext}}$$

$$(1.5a) \quad \int_{\Gamma_i} q \cdot v \, d\sigma = -Q_i(t), \quad t \in]0, T[, \quad 1 \leq i \leq N_p$$

(Q_i sera négatif en soutirage, positif s'il s'agit d'une injection).

Il convient en fait d'y ajouter une condition de compatibilité exprimant l'égalité des pressions en tout point du puits au droit de la couche, soit

$$(1.5b) \quad p = \text{constante inconnue sur } \Gamma_i, \text{ ne dépendant que de } t, \quad 1 \leq i \leq N_p.$$

A la limite extérieure Γ_{ext} du domaine on impose une condition d'imperméabilité, soit

$$(1.5c) \quad q \cdot v = 0$$

Les équations (1.1), (1.2), (1.3) constituent le système qui, joint aux conditions (1.4), (1.5a), (1.5b), (1.5c), régit le mouvement du gaz. Les

données du problème sont les coefficients ϕ , α , β , M , R et T_a ; μ et Z sont donnés en fonction de p . Les inconnues sont la pression p , le débit massique unitaire q et la masse spécifique ρ .

1.2 - HYPOTHESES ET FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Du système (1.1), (1.2), (1.3) on va déduire une équation d'évolution en la variable p . (1.2) va nous permettre d'éliminer q . En effet, (1.2) s'écrit

$$-\rho \nabla p = q(\alpha\mu + \beta |q|)$$

ce qui signifie que les vecteurs q et $\rho \nabla p$ sont colinéaires; on obtient le facteur de proportionnalité en résolvant l'équation (algébrique) du second degré en $|q|$

$$\beta |q|^2 + \alpha\mu |q| - |\rho \nabla p| = 0$$

laquelle donne, compte tenu du signe des racines,

$$|q| = \frac{-\alpha\mu + ((\alpha\mu)^2 + 4\beta |\rho \nabla p|)^{1/2}}{2\beta}$$

donc

$$q = \frac{\alpha\mu - ((\alpha\mu)^2 + 4\beta |\rho \nabla p|)^{1/2}}{2\beta |\rho \nabla p|} \rho \nabla p$$

(1.3) nous permet d'éliminer ρ , et on peut écrire

$$(1.6) \quad q = \frac{\alpha\mu - ((\alpha\mu)^2 + 2\beta b |\nabla p|^2)^{1/2}}{2\beta |\nabla p|^2} \nabla p^2$$

avec

$$b = \frac{M}{RT_a Z}$$

Ainsi, p vérifie l'équation

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\phi b p) - \operatorname{div} \left(\frac{((\alpha \mu)^2 + 2\beta b |\nabla p^2|)^{1/2} - \alpha \mu}{2\beta |\nabla p^2|} \nabla p^2 \right) = 0 \quad \text{dans } Q$$

Réciproquement, si p est solution positive de (1.7), le système p , $\rho = bp$, q (donné par (1.6)) est solution de (1.1), (1.2), (1.3).

C'est ainsi qu'on est amené à étudier l'équation (1.7), de type parabolique non linéaire.

Nous nous proposons d'étudier ici l'équation (1.7) dans le cas où on néglige les variations de la viscosité μ et du facteur de compressibilité Z ; pour la validité de ces hypothèses on peut consulter, par exemple, [8], [17]. μ et b sont donc ici deux constantes positives (Le cas général, μ et b dépendant de p , présente des difficultés spécifiques que nous n'aborderons pas dans ce travail).

Posons :

$$(1.8) \quad K = \frac{1}{\alpha \mu} \quad (= \frac{k}{\mu})$$

$$(1.9) \quad \sigma = \frac{2\beta b}{(\alpha \mu)^2}$$

alors (1.7) équivaut à

$$(1.7)' \quad \frac{\partial}{\partial t} (\phi p) - \operatorname{div} \left(K \frac{(1 + \sigma |\nabla p^2|)^{1/2} - 1}{\sigma |\nabla p^2|} \nabla p^2 \right) = 0 \quad \text{dans } Q$$

Cette équation, avec la condition initiale (1.4) et les conditions aux limites (1.5.a), (1.5.b), (1.5.c), (qu'on peut réécrire en fonction de p en utilisant (1.6)) sera étudiée sous la forme suivante :

Trouver $u (= p^2)$ positive, solution du problème (\mathcal{P}_0) ci-après

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 \quad \text{dans } Q \\ \text{avec} \\ F(v) = K \frac{(1 + \sigma |v|)^{1/2} - 1}{\sigma |v|} \quad v, v \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

$$(1.11) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(1.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_i} F(\nabla u) \cdot \nu \, d\sigma = Q_i(t), \quad t \in]0, T[, \quad 1 \leq i \leq N_p \\ u = \text{constante inconnue sur } \Gamma_i, \text{ ne dépendant que de } t, 1 \leq i \leq N_p \\ F(\nabla u) \cdot \nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{ext}} \times]0, T[\end{array} \right.$$

les fonctions $u_0 = p_0^2$, ϕ , K , σ et Q_i , $1 \leq i \leq N_p$, étant connues; elles seront précisées au cours de l'étude. La variable u est la "p²-pression" déjà utilisée en physique [4].

Remarque 1.1 : L'équation (1.10) est de la forme $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}u + \mathcal{A}u = 0$, dite doublement non linéaire, mais, comme on le verra, les opérateurs \mathcal{A} et \mathcal{B} possèdent des propriétés de monotonie (du type de la propriété des différentielles des fonctions différentiables convexes sur un espace de Banach). On s'inspirera alors, pour l'étude théorique, d'une technique développée dans [21], et, pour l'approximation et la résolution numérique, des méthodes développées dans [26].

Remarque 1.2 : Dans la suite on s'intéresse plus généralement au problème (1.10), (1.11) avec (au lieu de (1.12)) condition de Neumann.

$$(1.13) \quad F(\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[\quad (g \text{ donnée})$$

que nous appellerons problème (\mathcal{P}). L'étude que nous présentons peut être adaptée, avec quelques modifications mineures (cf. paragraphe 3), à celle du problème (\mathcal{P}_0).

2 - RESULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITE ET DE REGULARITE

POUR LE PROBLEME (P)

Soit Ω un domaine ouvert borné de \mathbb{R}^d , $1 \leq d \leq 3$, de frontière régulière Γ , de vecteur normal extérieur ν et $]0, T[$ l'intervalle de temps d'étude du phénomène.

Il s'agit de trouver u solution de

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \frac{u}{\sqrt{|u|}}) - \operatorname{div} F(\nabla u) = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[\\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ F(\nabla u) \cdot \nu = g & \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[\end{cases}$$

où

$$F(v) = K \frac{(1 + \sigma |v|)^{1/2} - 1}{\sigma |v|} v$$

ϕ, K, σ sont dans $L^\infty(\Omega)$, vérifiant

$$(2.1) \quad \begin{cases} 0 < \phi_- \leq \phi(x) \leq \phi_+ & \text{p.p. dans } \Omega \\ 0 < K_- \leq K(x) \leq K_+ & \text{p.p. dans } \Omega \\ 0 < \sigma_- \leq \sigma(x) \leq \sigma_+ & \text{p.p. dans } \Omega \end{cases}$$

Nous allons faire appel à la notion de solution faible, et utiliser les méthodes développées dans [21] et [22]. Il nous faut pour cela nous placer dans un cadre fonctionnel adapté.

Posons

$$V = W^{1, 3/2}(\Omega)$$

et définissons un opérateur non linéaire A de V dans V' par

$$(2.2) \quad \begin{cases} \forall u, v \in V \\ (Au, v) = \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \end{cases}$$

B est l'équation non linéaire de $L^{3/2}(\Omega)$ dans $L^3(\Omega)$ défini par

$$(2.3) \quad Bu = \phi \frac{u}{\sqrt{|u|}}$$

Supposons

$$(2.4) \quad u_0 \in V$$

$$(2.5) \quad g \in L^3(0, T; W^{-1/3, 3}(\Gamma)), \quad \frac{dg}{dt} \in L^3(0, T; W^{-1/3, 3}(\Gamma))$$

où $W^{-1/3, 3}(\Gamma)$ est le dual de $W^{1/3, 3/2}(\Gamma)$

et $W^{1/3, 3/2}(\Gamma)$ est l'espace parcouru par $v|_{\Gamma}$ lorsque v parcourt $W^{1, 3/2}(\Omega)$

On définit $f \in L^3(0, T; V')$ par

$$(2.6) \quad (f(t), v) = (g(t), v|_{\Gamma})_{W^{-1/3, 3}(\Gamma), W^{1/3, 3/2}(\Gamma)}$$

(2.5) implique $\frac{df}{dt} \in L^3(0, T; V')$, donc $f \in C^0([0, T]; V')$.

On considère alors le problème non linéaire suivant :

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} (Bu) + Au = f \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V')$$

$$(2.8) \quad u(0) = u_0$$

2.1 - EXISTENCE D'UNE SOLUTION FAIBLE

Nous allons établir le résultat suivant

THEOREME 1 Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction u telle que :

$$(2.9) \quad u \in L^\infty(0, T; V)$$

$$(2.10) \quad \frac{d}{dt}(Bu) \in L^\infty(0, T; V')$$

et u vérifiant (2.7), (2.8).

Remarque 2.1 : La condition (2.8) a bien un sens car il résulte de (2.9) et (2.10) que $Bu \in C^0([0, T]; V')$.

Remarque 2.2 : La démonstration que nous proposons ici est inspirée des techniques de [21]. (Les résultats de [21] ne s'appliquent pas directement dans notre cas car A n'est pas coercif sur V). Elle consiste en

- une semi discrétisation en temps de (2.7), (2.8) par un schéma implicite
- l'obtention d'estimations a priori (cf. remarque (2.3))
- le passage à la limite.

Remarque 2.3 : Multiplions formellement (2.7) par u (resp. $\frac{du}{dt}$); il vient (resp.)

$$(2.11) \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi |u|^{3/2} dx + \int_{\Omega} K \frac{(1 + \sigma |\nabla u|)^{1/2} - 1}{\sigma} |\nabla u| dx = (f, u)$$
$$\frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx + \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla \left(\frac{du}{dt} \right) dx = \left(f, \frac{du}{dt} \right)$$

mais
$$(f, \frac{du}{dt}) = \frac{d}{dt} (f, u) - (\frac{df}{dt}, u)$$

et

$$\int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla (\frac{du}{dt}) dx = \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1+\sigma |\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u|}{\sigma} dx \right]$$

donc

$$(2.12) \quad \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx + \frac{d}{dt} \left[\frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1+\sigma |\nabla u|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u|}{\sigma} dx \right] = \frac{d}{dt} (f, u) - (\frac{df}{dt}, u)$$

Les estimations a priori qui suivent seront calquées sur (2.11) et (2.12).

Avant de passer à la démonstration proprement dite du Théorème 1, explicitons quelques propriétés simples des opérateurs A et B.

Proposition 1

(i) Les opérateurs A et B définis respectivement par (2.2) et (2.3) sont holderiens d'exposant 1/2 et monotones.

(ii) Les fonctionnelles J_A et J_B définies respectivement sur V et $L^{3/2}(\Omega)$ par

$$(2.13) \quad J_A(v) = \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1+\sigma |\nabla v|)^{3/2}}{\sigma^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla v|}{\sigma} dx$$

$$(2.14) \quad J_B(v) = \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |v|^{3/2} dx$$

sont convexes, Frechet différentiables et telles que

$$J'_A = A, \quad J'_B \text{ s'identifie à } B \text{ (dans la dualité } L^{3/2}(\Omega), L^3(\Omega))$$

De plus,

$$(2.15) \quad J_A(v) \geq C_1 \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx - C_2 \quad \forall v \in V$$

C_1 et C_2 constantes strictement positives

$$(2.16) \quad J_B(v) \geq C_3 \int_{\Omega} |v|^{3/2} dx \quad \forall v \in L^{3/2}(\Omega)$$

C_3 constante strictement positive

La démonstration utilise le lemme suivant que nous démontrons en annexe

Lemme 1 L'application \mathcal{F} de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d définie par :

$$\mathcal{F}(v) = \frac{(1+|v|)^{1/2} - 1}{|v|} v$$

est holderienne d'exposant 1/2.

Démonstration de la position 1

Nous la donnons seulement pour A (la preuve est immédiate pour B).

point (1) : Soient $u_1, u_2 \in V$. On écrit

$$(Au_1 - Au_2, v) = \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} (\mathcal{F}(\nabla u_1) - \mathcal{F}(\nabla u_2)) \cdot \nabla v dx$$

alors, grace au lemme 1 et (2.1)

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leq C \int_{\Omega} |\nabla u_1 - \nabla u_2|^{1/2} |\nabla v| dx, \quad C \text{ constante}$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$|(Au_1 - Au_2, v)| \leq C \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V$$

donc A est holderien d'exposant 1/2.

Pour prouver que A est monotone, on écrit

$$\begin{aligned} (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Omega} |F(\nabla u_1)| |\nabla u_1| dx + \int_{\Omega} |F(\nabla u_2)| |\nabla u_2| dx \\ &\quad - \int_{\Omega} F(\nabla u_1) \cdot \nabla u_2 dx - \int_{\Omega} F(\nabla u_2) \cdot \nabla u_1 dx \end{aligned}$$

d'où

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2) \geq \int_{\Omega} (|F(\nabla u_1)| - |F(\nabla u_2)|) (|\nabla u_1| - |\nabla u_2|) dx$$

qui est positif car $x \rightarrow (1+x)^{1/2}$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

point (ii) : Un calcul facile montre que J_A est différentiable au sens de Gateaux, de différentielle $J'_A = A$; la monotonie et la continuité de A (point (i)) prouvent alors que J_A est convexe et Frechet différentiable. Soit maintenant $v \in V$. On a, grâce à (2.1),

$$J_A(v) \geq C'_1 \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx - C'_2 \int_{\Omega} |\nabla v| dx$$

puis en appliquant l'inégalité de Young

$$\forall \eta > 0 \quad \exists C_{\eta} > 0 \quad \text{tel que}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla v| dx \leq \eta \int_{\Omega} |\nabla v|^{3/2} dx + C_{\eta} (\text{mes } \Omega)$$

avec η convenablement choisi, on obtient l'inégalité (2.15).

Démonstration du théorème 1

a) Construction du problème approché

Nous introduisons les notations suivantes :

N est un entier destiné à tendre vers l'infini et $h = \frac{T}{N}$. Si $a = (a^0, \dots, a^N) \in E^{N+1}$, où E est un espace de Banach, $\Pi_h(a)$ est la

fonction étagée définie par

$$\begin{aligned} \Pi_h(a)(t) &= a^{n+1} && \text{si } nh < t \leq (n+1)h \quad n=0, \dots, N-1 \\ \Pi_h(a)(0) &= a_0 \end{aligned}$$

$\Lambda_h(a)$ est la fonction définie sur $[0, T]$, linéaire sur $[nh, (n+1)h]$ avec

$$\Lambda_h(a)(nh) = a^n \quad n = 0, \dots, N$$

et

$$D_h \Pi_h(a) = \frac{d}{dt} \Lambda_h(a)$$

On considère le problème discrétisé suivant :

$$(2.17) \quad u_h^0 = u_0$$

$$(2.18) \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) v \, dx + (Au_h^{n+1}, v) = (f_h^n, v) \quad \forall v \in V$$

$$n = 0, \dots, N-1$$

avec

$$f_h^n = \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} f(t) \, dt$$

Ce problème admet une solution unique $u_h = (u_h^0, \dots, u_h^N) \in V^{N+1}$. En effet, la fonction J_0 de V dans \mathbb{R} définit par :

$$J_0(v) = \frac{1}{h} J_B(v) + J_A(v) - (f_h^0, v) - \frac{1}{h} \int_{\Omega} Bu_h^0 v \, dx$$

(J_A et J_B étant définies respectivement par (2.13), (2.14)) est convexe, et même strictement puisque J_B l'est, continue, tendant vers l'infini à l'infini sur V (grâce à (2.15), (2.16)), donc admet un minimum unique en u^* et $J_0'(u^*) = 0$. On obtient ainsi l'existence et l'unicité de u_h^1 dans (2.18), puis par récurrence celle de u_h^n , $n=2, \dots, N$.

b) Estimations a priori

b.1) Prenons dans (2.18) $v = u_h^{n+1}$; il vient

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} dx + (Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) = (f_h^n, u_h^{n+1})$$

Utilisant l'inégalité de Young

$\forall \eta > 0 \exists C_{\eta} > 0$ tel que :

$$\int_{\Omega} Bu_h^n u_h^{n+1} dx \leq \phi_+ \int_{\Omega} |u_h^n|^{1/2} |u_h^{n+1}| dx \leq \phi_+ \left[\eta \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + C_{\eta} \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right]$$

(ϕ_+ donné par (2.1))

on a, en choisissant η convenablement,

$$(2.19) \quad \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n) u_h^{n+1} dx \geq C_4 \left[\int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right]$$

C_4 constante strictement positive indépendante de h et n

D'autre part,

$$|(f_h^n, u_h^{n+1})| \leq \frac{1}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'} \|u_h^{n+1}\|_V dt$$

on en déduit

$\forall \eta > 0 \exists C_{\eta} > 0$ tel que

$$(2.20) \quad |(f_h^n, u_h^{n+1})| \leq \eta \|u_h^{n+1}\|_V^{3/2} + \frac{C_{\eta}}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'}^3 dt$$

Les inégalités (2.19), (2.20) et

$$(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1}) \geq C_1 \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx - C_2 \quad (\text{conséquence de (2.15)})$$

impliquent

$$\frac{C_4}{h} \left[\int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right] + C'_1 \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \\ \eta \|u_h^{n+1}\|_{V'}^{3/2} + \frac{C_n}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'}^3 dt + C'_2$$

d'où, en choisissant η convenablement,

$$(2.21) \quad \frac{C_4}{h} \left[\int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx - \int_{\Omega} |u_h^n|^{3/2} dx \right] + C_5 \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \\ \eta \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + \frac{C_n}{h} \int_{nh}^{(n+1)h} \|f(t)\|_{V'}^3 dt + C'_2$$

C_5 constante strictement positive, indépendante de h et n .

Multipliant (2.21) par h et sommant de 0 à $N-1$, il vient

$$C_4 \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx + h C_5 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \\ \eta h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx + C_n \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^3 dt + TC'_2 + C_4 \int_{\Omega} |u_0|^{3/2} dx$$

d'où

$$(2.22) \quad \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq C_6 + h C_7 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx$$

$$(2.23) \quad h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq C_6 + h C_7 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |u_h^{n+1}|^{3/2} dx$$

C_6 et C_7 constantes indépendantes de h et n .

De (2.22) on déduit

$$\int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq \text{constante}$$

puis, de (2.23)

$$h \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\Omega} |\nabla u_h^{n+1}|^{3/2} dx \leq \text{constante}$$

finalement,

$$(2.24) \quad \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx \leq \text{constante}$$

$$(2.25) \quad h \sum_{n=0}^{N-1} \|u_h^n\|_V^{3/2} \leq \text{constante}$$

b.2) Prenons dans (2.18) $v = u_h^{n+1} - u_h^n$; il vient

$$(2.26) \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n)(u_h^{n+1} - u_h^n) dx + (Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n) = (f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n)$$

Négligeant le premier terme qui est positif et tenant compte de

$$(Au_h^{n+1}, u_h^{n+1} - u_h^n) \geq J_A(u_h^{n+1}) - J_A(u_h^n) \quad (J_A \text{ convexe})$$

on obtient en sommant (2.26) de 0 à N-1

$$J_A(u_h^N) - J_A(u_0) \leq \sum_{n=0}^{N-1} (f_h^n, u_h^{n+1} - u_h^n) = (f_h^{N-1}, u_h^N) - (f_h^0, u_0) - \sum_{n=1}^{N-1} (f_h^n - f_h^{n-1}, u_h^n)$$

d'où, avec l'inégalité de Young et (2.25)

$$J_A(u_h^N) \leq C_8 + n \|u_h^N\|_V^{3/2}$$

C_8 constante indépendante de h et n

utilisant maintenant (2.15) et (2.24), on obtient (avec η convenablement choisi)

$$(2.27) \quad \|u_h^N\|_V \leq \text{constante}$$

et de (2.18) il résulte alors

$$(2.28) \quad \frac{1}{h} \|Bu_h^{n+1} - Bu_h^n\|_V \leq \text{constante}$$

b.3) Soit ψ_h la fonction numérique définie sur $[0, T]$ par

$$\psi_h(t) = \int_{\Omega} |\Lambda_h(u_h)(t)|^{3/2} dx$$

D'après (2.24) ψ_h est uniformément bornée. De plus, (2.21) et (2.24) impliquent

$$\frac{1}{h} (\psi_h(nh+h) - \psi_h(nh)) \leq \text{constante}$$

et en prenant $v = u_h^n$ dans (2.18), on obtient grâce à (2.27)

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^n - Bu_h^{n+1}) u_h^n dx \leq \text{constante}$$

d'où

$$\frac{1}{h} (\psi_h(nh) - \psi_h(nh+h)) \leq \text{constante}$$

Donc

$$(2.29) \quad \left| \frac{1}{h} (\psi_h(nh+h) - \psi_h(nh)) \right| \leq \text{constante}$$

c) Passage à la limite

Des estimations (2.27), (2.28), (2.29) on déduit qu'on peut extraire des sous suites (encore indexées par h) telles que :

$$\begin{array}{llll} \Pi_h(u_h) & \longrightarrow u & \text{dans} & L^\infty(0,T;V) \text{ faible } * \\ \Pi_h(Bu_h) & \longrightarrow v & \text{dans} & L^\infty(0,T;L^3) \text{ faible } * \\ D_h \Pi_h(Bu_h) & \longrightarrow \frac{dv}{dt} & \text{dans} & L^\infty(0,T;V') \text{ faible } * \\ \Pi_h(Au_h) & \longrightarrow \chi & \text{dans} & L^\infty(0,T;V') \text{ faible } * \\ \psi_h & \longrightarrow \psi & \text{dans} & C^0([0,T]; \mathbb{R}) \end{array}$$

(ainsi $\psi(0) = \int_{\Omega} |u_0|^{3/2} dx$, $\psi(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_h^N|^{3/2} dx$)

En reprenant la démonstration de [21], on obtient

$$\begin{array}{l} v = Bu \\ \frac{d}{dt} Bu + \chi = f \quad \text{dans } L^\infty(0,T;V') \\ \chi = Au \end{array}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 1.

2.2 - REGULARITE DE LA SOLUTION FAIBLE

Une estimation a priori supplémentaire va nous permettre d'établir le résultat de régularité suivant

Proposition 2 Si u est la solution précédemment trouvée, alors

(2.30) $u \in C^0([0,T], L^{3/2}(\Omega))$

(2.31) $|u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q)$

Démonstration

On considère la suite (u_h^n) définie par (2.17), (2.18). D'après (2.26) et l'estimation (2.27)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^{n+1} - Bu_h^n)(u_h^{n+1} - u_h^n) dx \leq \text{constante}$$

d'où, avec (2.1)

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left(\frac{u_h^{n+1}}{\sqrt{|u_h^{n+1}|}} - \frac{u_h^n}{\sqrt{|u_h^n|}} \right) (u_h^{n+1} - u_h^n) dx \leq \text{constante}$$

Utilisant l'inégalité dans \mathbb{R}

$$\frac{|x-y|^2}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} < \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{y}{\sqrt{|y|}} \right) (x-y)$$

on obtient

$$(2.32) \quad \sum_{n=0}^{N-1} h \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{|u_h^{n+1}|} + \sqrt{|u_h^n|}} \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{h} \right)^2 dx \leq \text{constante}$$

Soit w_h la fonction étagée de $[0, T]$ dans $L^3(\Omega)$ définie par

$$w_h(t) = |u_h^{n+1}|^{1/2} + |u_h^n|^{1/2} \quad \text{si } nh < t \leq (n+1)h, \quad n=0, \dots, N-1$$

$$w_h(0) = |u_h^1|^{1/2} + |u_0|^{1/2}$$

et
$$s_h = \frac{1}{w_h^{1/2}} D_h \Pi_h(u_h)$$

D'après (2.32) (resp. 2.27)) s_h (resp. w_h) est bornée dans $L^2(Q)$ (resp. $L^3(Q)$). On en déduit, avec l'inégalité suivante

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega} |w_h|^{3/4} |s_h|^{3/2} dx \right) dt \leq \left(\int_0^T \|w_h\|_{L^3(\Omega)}^3 \right)^{1/4} \left(\int_0^T \|s_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{3/4}$$

$D_h \Pi_h(u_h)$ est bornée dans $L^{3/2}(Q)$

Appliquant le théorème d'Ascoli à la suite $\Lambda_h(u_h)$, on a pour une suite extraire

$$\begin{aligned} \Lambda_h(u_h) & \text{ converge vers } u & \text{ dans } L^{3/2}(Q) \\ \frac{d}{dt} \Lambda_h(u_h) & \text{ converge vers } \frac{du}{dt} & \text{ dans } L^{3/2}(Q) \text{ faible} \end{aligned}$$

d'où (2.30). De la convergence de $\Pi_h(u_h)$ vers u dans $L^{3/2}(Q)$ on déduit

$$\begin{aligned} \omega_h & \text{ converge vers } 2|u|^{1/2} & \text{ dans } L^3(Q) \\ \omega_h^{1/2} & \text{ converge vers } \sqrt{2}|u|^{1/4} & \text{ dans } L^6(Q) \end{aligned}$$

Alors si s est la limite (dans $L^2(Q)$ faible) d'une suite extraire de s_h on a

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} |u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q)$$

Remarque 2.4 : On vient aussi de montrer que $\frac{du}{dt} \in L^{3/2}(Q)$. Notons qu'on peut déduire ce résultat de (2.31), (2.9) et de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} dx dt &= \int_Q (|u|^{3/8}) \left(\frac{1}{|u|^{3/8}} \left| \frac{du}{dt} \right|^{3/2} \right) dx dt \leq \\ & \left(\int_Q |u|^{3/2} dx dt \right)^{1/4} \left(\int_Q \frac{1}{\sqrt{|u|}} \left| \frac{du}{dt} \right|^2 dx dt \right)^{3/4} \end{aligned}$$

2.3 - UN RESULTAT D'UNICITE

On a un résultat d'unicité dans une classe de fonctions régulières, donné par le théorème suivant

THEOREME 2 Il n'existe, au plus, qu'une solution de (2.7), (2.8) possédant la régularité

(2.33) $\frac{d}{dt} (Bu) \in L^2(Q)$

Démonstration

Soient u_1 et u_2 deux fonctions vérifiant (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) et (2.33). On a

$$\frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) + Au_1 - Au_2 = 0 \quad \text{dans } L^\infty(0, T; V')$$

Soit $u_\varepsilon = \text{sign}_\varepsilon(u_1 - u_2)$, où sign_ε est la régularisée de la fonction sign

$$\begin{aligned} \text{sign}(y) &= 1 & \text{si } y > 0 & & \text{sign}_\varepsilon(y) &= 1 & \text{si } y > \varepsilon \\ \text{sign}(y) &= -1 & \text{si } y < 0 & & \text{sign}_\varepsilon(y) &= y/\varepsilon & \text{si } |y| \leq \varepsilon \\ & & & & \text{sign}_\varepsilon(y) &= -1 & \text{si } y < -\varepsilon \end{aligned}$$

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0, T; V' \cap L^\infty(\Omega))$$

$$(Au_1 - Au_2, u_\varepsilon) = \int_{\Omega} (F(\nabla u_1) - F(\nabla u_2)) \cdot \nabla(u_1 - u_2) (\text{sign}'_\varepsilon(u_1 - u_2)) \, dx \geq 0$$

donc

$$(2.34) \quad \int_0^{T'} \left(\frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2), u_\varepsilon \right) dt \leq 0 \quad \forall T', 0 < T' \leq T$$

Comme la dimension d'espace d est inférieure ou égale à 3, on a, grâce au théorème d'injection de Sobolev

$$V \rightarrow L^2(\Omega) \quad (\text{en fait vrai pour } d \leq 6)$$

d'où $L^2(\Omega) \rightarrow V'$; alors de (2.33) et (2.34) on déduit

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) \right) u_\varepsilon \, dx \, dt \leq 0$$

On fait maintenant tendre ε vers 0 ; on obtient

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (Bu_1) - \frac{d}{dt} (Bu_2) \right) \text{sign}(u_1 - u_2) \, dx \, dt \leq 0$$

ou encore, puisque B est monotone,

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega} \left(\frac{d}{dt} (Bu_1 - Bu_2) \right) \text{sign}(Bu_1 - Bu_2) dx dt \leq 0$$

or, pour $\omega \in L^\infty(0, T'; L^3(\Omega))$ tel que $\frac{d\omega}{dt} \in L^2(0, T', L^2(\Omega))$ on montre (par régularisation et passage à la limite)

$$\int_0^{T'} \int_{\Omega} \frac{d\omega}{dt} \text{sign}(\omega) dx dt = \int_{\Omega} |\omega(x, T')| dx - \int_{\Omega} |\omega(x, 0)| dx$$

Ainsi

$$\int_0^{T'} |Bu_1(x, T') - Bu_2(x, T')| dx \leq 0 \quad \forall T', 0 < T' \leq T$$

d'où $Bu_1 = Bu_2$ qui implique $u_1 = u_2$ car $\phi > 0$ et $x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{|x|}}$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2.4 - UN CAS D'EXISTENCE ET D'UNICITE D'UNE SOLUTION POSITIVE DU PROBLEME
(P)

Etablissons d'abord un lemme qui permet de donner un sens à la condition aux limites du problème (P) (dans $C^0([0, T]; W^{-1/3, 3}(\Gamma))$) lorsque la solution de (2.7), (2.8) vérifie (2.33).

LEMME 2 Soit $E = \{q \in (L^3(\Omega))^d; \text{div } q \in L^2(\Omega)\}$ muni de la norme $\|q\|_E = \|q\|_{(L^3(\Omega))^d} + \|\text{div } q\|_{L^2(\Omega)}$ qui en fait un espace de Banach. Pour $q \in E$ on peut définir de manière unique la trace normale \mathcal{C}_ν de q sur Γ par

(2.35) $\mathcal{C}_\nu q \in W^{-1/3, 3}(\Gamma)$

$$(\mathcal{C}_\nu q, v|_\Gamma) = \int_{\Omega} q \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} v \text{div } q \quad \forall v \in V$$

L'application \mathcal{C}_ν est linéaire continue de E dans $W^{-1/3, 3}(\Gamma)$ et sa restriction à $(C^1(\bar{\Omega}))^d$ coïncide avec la trace normale au sens usuel.

Démonstration

Soit $\phi \in W^{1/3,3/2}(\Gamma)$; on peut associer à ϕ un relèvement $v \in V$, vérifiant $v|_{\Gamma} = \phi$ et tel que l'application $\phi \longrightarrow v$ soit linéaire continue de $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ dans V . On vérifie que, pour q et ϕ fixés, la quantité $\int_{\Omega} q \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \, dx$ (qui a un sens compte tenu de l'injection de Sobolev $V \longrightarrow L^2(\Omega)$ lorsque $d \leq 6$) est indépendante du choix du relèvement; en effet si $v_1, v_2 \in V$ et $v_1|_{\Gamma} = v_2|_{\Gamma} = \phi$ alors $v_1 - v_2 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ et le résultat est immédiat par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,3/2}(\Omega)$.
Donc $\phi \longrightarrow \int_{\Omega} q \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \, dx$ est une forme linéaire continue sur $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ et par conséquent

$$\int_{\Omega} q \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \, dx = (\mathcal{E}_v q, \phi), \quad \mathcal{E}_v q \in W^{-1/3,3}(\Gamma),$$

où $(\ , \)$ désigne le produit scalaire entre $W^{-1/3,3}(\Gamma)$ et $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$. Il est facile de voir que l'application \mathcal{E}_v ainsi définie est linéaire continue de E dans $W^{-1/3,3}(\Gamma)$. Soit maintenant $q \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$; on a

$$(2.36) \quad (\mathcal{E}_v q, v|_{\Gamma}) = \int_{\Omega} q \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} v \operatorname{div} q \, dx = \int_{\Gamma} q \cdot \nu \, v|_{\Gamma} \, d\sigma \quad \forall v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

Or les traces des fonctions de $C^1(\bar{\Omega})$ forment un sous espace dense de $W^{1/3,3/2}(\Gamma)$ et l'égalité (2.36) a donc lieu $\forall v \in V$. Il s'ensuit que

$\mathcal{E}_v q = q \cdot \nu \quad \forall q \in (C^1(\bar{\Omega}))^d$. Enfin, $(C^1(\bar{\Omega}))^d$ étant dense dans E (cf. [23]), \mathcal{E}_v est donc définie par (2.35) de manière unique.

Le lemme suivant montre l'existence d'une solution positive (resp. négative) de (2.7), (2.8) lorsque la donnée initiale et la donnée aux limites sont positives (resp. négatives). On dira que g est positive (resp. négative) si

$$(g(t), v|_{\Gamma}) \geq 0 \quad (\text{resp. } \leq 0) \quad \forall v \in V, v \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega; \forall t \in [0, T]$$

LEMME 3

Si,

$$(2.37) \quad \inf \text{ess } u_0 > -\infty \text{ et } g \text{ est positive}$$

alors, la solution u de (2.7), (2.8) donnée par le théorème 1 vérifie

$$u(y) \geq \inf \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } Q.$$

Démonstration

Montrons que la suite (u_h^n) définie par (2.17), (2.18) vérifie :

$$u_h^n(x) \geq \inf \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

On pose $u_{oi} = \inf \text{ess } u_0$.

Pour $n=1$, on prend $v_\epsilon = \text{sign}_\epsilon^- (u_h^1 - u_{oi})$ dans (2.18) où $\epsilon > 0$ et sign_ϵ^- est définie sur \mathbb{R} par

$$\text{sign}_\epsilon^-(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ \lambda/\epsilon & \text{si } -\epsilon \leq \lambda \leq 0 \\ -1 & \text{si } \lambda \leq -\epsilon \end{cases}$$

On obtient,

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) v_\epsilon \, dx + \int_{\Omega} F(\nabla u_h^1) \cdot \nabla v_\epsilon \, dx = (f_h^0, v_\epsilon) + \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_0 - Bu_{oi}) v_\epsilon \, dx.$$

On vérifie que $\int_{\Omega} F(\nabla u_h^1) \cdot \nabla v_\epsilon \, dx \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0$

d'où, avec (2.37),

$$(2.38) \quad \frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) v_{\varepsilon} dx \leq 0$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de passer à la limite dans (2.38) quand ε tend vers 0; ce qui donne

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (Bu_h^1 - Bu_{oi}) \text{sign}^-(u_h^1 - u_{oi}) dx \leq 0, \quad \text{où}$$

$$\text{sign}^-(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \\ -1 & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

Comme $(Bu_h^1 - Bu_{oi}) \text{sign}^-(u_h^1 - u_{oi}) = \phi(u_h^1 - u_{oi})^-$

on déduit $(u_h^1 - u_{oi})^- = 0$

c'est-à-dire $u_h^1(x) \geq u_{oi} \quad \text{p.p. dans } \Omega$

Par récurrence on montre que $u_h^n(x) \geq u_{oi} \quad \text{p.p. dans } \Omega.$

Remarque 2.5 : Si $\sup \text{ess } u_0 < +\infty$ et g négative alors
 $u(y) \leq \sup \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } Q.$

Des théorèmes 1, 2, et lemmes 2,3 on déduit la proposition suivante

PROPOSITION 3 On suppose que $\inf \text{ess } u_0 > 0$ et g positive.

Alors il existe une fonction u et une seule telle que :

(2.39) $u \in L^\infty(0, T; V)$

(2.40) $\frac{d}{dt} (Bu) \in L^\infty(0, T; V') \cap L^2(Q)$

(2.41) $u(y) \geq \inf \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } Q$

et u vérifiant

(2.42) $\frac{d}{dt} (Bu) - \text{div} (F(\nabla u)) = 0 \quad \text{dans } L^2(Q)$

(2.43) $u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega$

(2.44) $F(\nabla u) \cdot \nu = g \quad \text{dans } C^0([0, T]; W^{-1/3, 3}(\Gamma))$

Remarque 2.6: Dans le cas général nous ne savons pas montrer l'existence d'une solution faible de (2.7), (2.8) possédant la régularité (2.33). Il serait intéressant d'étudier le cas u_0 positive et g négative et de voir à quelles conditions supplémentaires sur les données a-t-on existence et unicité d'une solution positive du problème (\mathcal{P}).

3 - RESULTATS D'EXISTENCE, D'UNICITE ET DE REGULARITE

POUR LE PROBLEME (\mathcal{P}_0)

Dans ce paragraphe Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $1 \leq d \leq 3$, ayant une frontière extérieure Γ_{ext} et une frontière intérieure Γ_{int} régulières (cf. fig.1.1; on suppose $N_p = 1$ afin de ne pas alourdir les notations). Il s'agit de trouver u solution de

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) - \operatorname{div} F(\nabla u) = \quad \text{dans } Q = \Omega \times]0, T[$$

$$(3.2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_{ext} = \Gamma_{ext} \times]0, T[$$

$$(3.4) \quad \int_{\Gamma_{int}} F(\nabla u) \cdot \nu \, d\sigma = Q_0 \quad \text{dans }]0, T[$$

$$u|_{\Gamma_{int}} = \text{constante inconnue}$$

ϕ , K , σ vérifiant (2.1).

Pour définir une solution faible de (3.1),..., (3.4) on introduit le sous espace fermé de V ,

$$V_0 = \{ v \in V ; v|_{\Gamma_{int}} \text{ est constante} \}$$

et on note A_0 l'opérateur de V_0 dans V_0 défini par

$$(A_0 u, v) = \int_{\Omega} F(\nabla u) \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in V_0$$

Supposons

$$u_0 \in V_0$$

$$Q_0 \in W^{1,3}(0,T)$$

On définit $f_0 \in C^0([0,T]; V'_0)$, tel que $\frac{df_0}{dt} \in L^3(0,T; V'_0)$, en posant

$$(f_0(t), v) = Q_0(t) v|_{\Gamma_{int}} \quad \forall t \in [0,T], \forall v \in V_0$$

Alors, comme au paragraphe 2, on a :

PROPOSITION 4 Sous les hypothèses précédentes, il existe une fonction u tel que :

$$(3.5) \quad u \in L^\infty(0,T; V_0) \cap C^0([0,T]; L^{3/2}(\Omega))$$

$$(3.6) \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^\infty(0,T; V'_0)$$

$$(3.7) \quad |u|^{-1/4} \frac{du}{dt} \in L^2(Q)$$

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} (Bu) + A_0 u = f_0 \quad \text{dans } L^\infty(0,T; V'_0)$$

$$(3.9) \quad u(0) = u_0$$

et il n'existe, au plus, qu'une solution de (3.8), (3.9) possédant la régularité $\frac{d}{dt} (Bu) \in L^2(Q)$

PROPOSITION 5 Si $\inf \text{ess } u_0 > 0$ et Q_0 est positive, alors, le problème (3.1),... (3.4) admet une solution unique u vérifiant :

$$(3.10) \quad \frac{d}{dt} (Bu) \in L^2(Q)$$

$$(3.11) \quad u(y) \geq \inf \text{ess } u_0 \quad \text{p.p. dans } Q$$

Remarque 3.1 : Q_0 positive signifie que l'on injecte du gaz dans le gisement. En soutirage, Q_0 est négative; se pose alors, comme au paragraphe 2, la question de positivité de la solution u de (3.1),..., (3.4) (cf. remarque 2.6).

4 - LIMITE QUAND σ TEND VERS 0

Soit \mathcal{C} l'ouvert de $L^\infty(\Omega)$ défini par :

$$\mathcal{C} = \{ \sigma \in L^\infty(\Omega) ; \exists \sigma_- > 0, \sigma(x) \geq \sigma_- \text{ p.p. dans } \Omega \}$$

et (σ_n) une suite d'éléments de \mathcal{C} . On note F_n la fonction F associée à σ_n , A_n l'opérateur associé à F_n et u_n la solution de (2.7), (2.8) associée à σ_n par la méthode constructive du théorème 1; elle vérifie donc, (2.9), (2.10), (2.30), (2.31).

Posons $W = H^1(\Omega)$ et notons A^* l'opérateur linéaire de W dans W' , défini par

$$(4.1) \quad (A^*u, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in W$$

Nous allons établir le résultat suivant :

THEOREME 3

Si $\sigma_n \longrightarrow 0$ dans $L^\infty(\Omega)$ (quand $n \rightarrow \infty$)

alors $u_n \longrightarrow u^*$ dans $L^\infty(0, T; V)$

où $u^* \in L^\infty(0, T; W)$, u^* est la solution (unique) de

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} (Bu^*) + A^* u^* = f \quad \text{dans } L^\infty(0, T; W')$$

$$(4.3) \quad u^*(0) = u_0$$

et telle que

$$\frac{d}{dt} (Bu^*) \in L^\infty(0, T; W'),$$

$$(4.4) \quad \sqrt{t} \frac{du^*}{dt} \in L^{3/2}(Q) \quad (\text{et donc } u^* \in C^0([\delta, T]; L^{3/2}(\Omega)) \quad \forall \delta > 0)$$

Démonstration

Elle comprend quatre étapes :

(i) Convergence faible d'une suite extraite de (u_n)

(ii) Estimations a priori

On a pour tout n

$$(4.5) \quad \left(\frac{d}{dt} B u_n(s), v\right) + (A_n u_n(s), v) = (f(s), v)$$

$$\forall v \in V, \text{ p.p. dans }]0, T[,$$

$$(4.6) \quad u_n(0) = u_0.$$

Prenons $v = u_n(s)$ dans (4.5) ; il vient

$$(4.7) \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi |u_n(s)|^{3/2} dx + (A_n u_n(s), u_n(s)) = f(s), u_n(s)$$

d'où, en intégrant de 0 à t,

$$(4.8) \quad \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi |u_n(t)|^{3/2} dx + \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s)) ds = \\ \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u_0|^{3/2} dx + \int_0^t (f(s), u_n(s)) ds$$

mais, pour $\sigma_n \leq \sigma_*$ ($\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*$),

$$\frac{(1+\sigma_n(x) |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2-1}}{\sigma_n(x)} \geq \frac{(1+\sigma_*) |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2-1}}{\sigma_*}$$

pour presque tout $(x,s) \in Q$, de sorte qu'avec (2.1)

$$(4.9) \quad \int_0^t (A_n u_n(s), u_n(s)) ds \geq K_- \iint_{\Omega} \frac{(1+\sigma_* |\nabla u_n(x,s)|)^{1/2-1}}{\sigma_*} |\nabla u_n(x,s)| dx ds \\ \geq \frac{C'_1}{\sqrt{\sigma_*}} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_n(x,s)|^{3/2} dx ds - \frac{C'_2}{\sigma_*^2}$$

où C'_1 et C'_2 sont des constantes strictement positives indépendantes de n .

Dans le second membre de (4.8) on a

$$(4.10) \quad \forall \eta > 0 \quad] C_\eta > 0$$

$$\int_0^t (f(s), u_n(s)) \, ds \leq \frac{2\eta}{3} \int_0^t \|u_n(s)\|_V^{3/2} \, ds + \frac{C_\eta}{3} \int_0^t \|f(s)\|_V^3 \, ds$$

choisissant convenablement η (en tenant compte de (2.1) et (4.9)), (4.8) donne alors

$$(4.11) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2} + C'_3 \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x,s)|^{3/2} \, dx \, ds \leq$$

$$C'_4 \int_0^t \|u_n(s)\|_{L^{3/2}(\Omega)}^{3/2} \, ds + C'_5$$

C'_3, C'_4, C'_5 , constantes strictement positives indépendantes de n .
On en déduit en utilisant le lemme de Gronwall

$$(4.12) \quad \|u_n(t)\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq \text{constante} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(4.13) \quad \int_0^t \int_\Omega |\nabla u_n(x,s)|^{3/2} \, dx \, ds \leq \text{constante} \quad \forall t \in]0, T[$$

De (4.7), (4.8) et (2.1) il résulte alors

$$(4.14) \quad \|\psi_n\|_{W^{1,1}(]0, T[)} \leq \text{constante}$$

où ψ_n est la fonction numérique continue, définie sur $[0, T]$ par

$$\psi_n(t) = \frac{1}{3} \int_\Omega \phi |u_n(t)|^{3/2} \, dx$$

$$(4.15) \quad \int_0^t (A_n u_n(t), u_n(s)) \, ds \leq \text{constante} \quad \forall t \in]0, T[$$

Les estimations a priori ci-dessus ne suffisent pas pour passer à la limite, à cause du changement de comportement de la fonction F au voisinage de 0. Pour tenir compte de cela, on introduit les sous ensembles de Q, mesurables

$$Q_{1,n} = \{ y = (x,t) \in Q ; \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)| < 3 \}$$

$$Q_{2,n} = \{ y = (x,t) \in Q ; \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)| \geq 3 \}$$

et on note $\chi_{1,n}$ (resp. $\chi_{2,n}$) la fonction caractéristique dans Q de $Q_{1,n}$ (resp. $Q_{2,n}$).

Ayant,

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq \sigma_n(x) \frac{|\nabla u_n(y)|}{4} \quad \text{dans } Q_{1,n}$$

on déduit de (4.15) que

$$(4.16) \quad \int_{Q_{1,n}} |\nabla u_n(y)|^2 dy \leq \text{constante}$$

De même, la relation

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq 1 \quad \text{dans } Q_{2,n}$$

et (4.15) entraînent

$$(4.17) \quad \int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n(x)} |\nabla u_n(y)| dy \leq \text{constante}$$

Montrons maintenant que $A_n u_n$ est borné dans $L^2(0,T;W')$.

Soit $v \in W$, $\|v\|_W \leq 1$ grace à l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\int_0^t |(A_n u_n, v)|^2 dt \leq K_+ \int_Q \left| \frac{(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy$$

et comme

$$\int_Q \left| \frac{(1+\sigma_n(x) |\nabla u_n(xy)|)^{1/2-1}}{\sigma_n(x)} \right|^2 dy \leq \int_{Q_{1,n}} \left| \frac{\nabla u_n(y)}{2} \right|^2 dy + \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n(y)|}{\sigma_n(x)} dy$$

il vient en utilisant (4.16) et (4.17)

$$(4.18) \quad \|A_n u_n\|_{L^2(0,T;W')} \leq \text{constante.}$$

(1.2) Passage à la limite

Les suites extraites étant indexées par n , il résulte des estimations (4.12), (4.13), (4.14), (4.18) et (B borné sur les bornés de $L^{3/2}(\Omega)$) que

$$(4.19) \quad u_n \longrightarrow u^* \quad \text{dans } L^\infty(0,T; L^{3/2}(\Omega)) \quad \text{faible} *$$

$$(4.20) \quad B u_n \longrightarrow v^* \quad \text{dans } L^\infty(0,T; L^3(\Omega)) \quad \text{faible} *$$

$$(4.21) \quad \nabla u_n \longrightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^{3/2}(0,T; (L^{3/2}(\Omega))^d) \quad \text{faible}$$

$$(4.22) \quad \psi_n \longrightarrow \psi^* \quad \text{dans } L^\infty(0,T) \quad \text{faible} *$$

$$(4.23) \quad A_n u_n \longrightarrow A_* \quad \text{dans } L^2(0,T; W') \quad \text{faible}$$

L'injection de V dans $L^{3/2}(\Omega)$ étant compacte, celle de W dans $L^{3/2}(\Omega)$ l'est donc, ainsi que sa transportée (de $L^3(\Omega)$ dans W'). Appliquant le théorème 5.1 de [22] à la suite $B u_n$ qui vérifie (4.20) et

$$\left\| \frac{d}{dt} B u_n \right\|_{L^2(0,T;W')} \leq \text{constante}$$

on peut supposer que

$$(4.24) \quad B u_n \longrightarrow v^* \quad \text{dans } C^0([0,T]; W')$$

De (4.19) et (4.24) on déduit (en utilisant la monotonie et la continuité de B) que

$$(4.25) \quad v^* = Bu^*.$$

Appliquant l'inégalité de Young on peut écrire

$$(4.26) \quad \int_{\Omega} (Bu_n(t) - Bu^*(t))u_n(t) dx \leq \frac{1}{3} \left\{ \int_{\Omega} \phi |u_n(t)|^{3/2} dx - \int_{\Omega} \phi |u^*(t)|^{3/2} dx \right\} \leq$$

$$\int_{\Omega} (Bu_n(t) - Bu^*(t)) u^*(t) dx \quad \text{p.p. dans }]0, T[$$

d'où il résulte, en utilisant (4.24) et (4.25)

$$(4.27) \quad \psi^*(t) = \frac{1}{3} \int_{\Omega} \phi |u^*(t)|^{3/2} dx \quad \text{p.p. dans }]0, T[$$

Montrons que $u^* \in L^2(0, T; W)$

D'après (4.16)

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \text{ est borné dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$$

donc, pour une suite extraite (indexée par n),

$$\begin{aligned} \chi_{1,n} \nabla u_n &\longrightarrow s && \text{dans } L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible} \\ \text{mais,} &&& \\ \chi_{1,n} &\longrightarrow 1 && \text{dans } L^2(Q), \text{ puisque} \end{aligned}$$

$$\int_Q |\chi_{1,n}^{-1}|^2 dy = \int_{Q_{2,n}} dy \leq \frac{1}{3} \int_{Q_{2,n}} \sigma_n |\nabla u_n| dy \leq C'_6 \|\sigma_n\|_{L^\infty(\Omega)},$$

C'_6 constante indépendante de n

d'où on déduit avec (4.21)

donc

$$\chi_{1,n} \nabla u_n \longrightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible}$$

$$\nabla u^* = s \quad L^2(0,T; (L^2(\Omega))^d)$$

ce qui, joint à $u^* \in L^2(0,T, L^{3/2}(\Omega))$, entraîne

$$u^* \in L^2(0,T; W).$$

Montrons que $A_* = A^* u^*$

Posons,

$$\varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n - A_n v, u_n - v) dt, \quad v \in L^2(0,T; W), \quad \text{et}$$

$$\gamma \in C^1([0,T]; \mathbb{R}) \quad \gamma(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,T], \quad \gamma(0) = \gamma(T) = 0$$

D'après la monotonie de A_n , $\varepsilon_n \geq 0$

Grace à (4.23)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, v) dt = \int_0^T \gamma(t) (A_*, v) dt$$

Appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n v, v) dt = \int_0^T \gamma(t) (A^* v, v) dt$$

D'autre part

$$(4.28) \quad \int_0^T \gamma(t) (A_n v, u_n) dt = \int_Q \gamma(t) F_n(\nabla v) \cdot (\chi_{1,n} \nabla u_n) dy$$

$$+ \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) F_n(\nabla v) \cdot \nabla u_n dy$$

La première intégrale du second membre de (4.28) a pour limite

$$\int_Q \gamma(t) \frac{k}{2} \nabla u^* \nabla v \, dy = \int_0^T \gamma(t) (A^* v, u^*) \, dt \quad \text{puisque}$$

$$x_{1,n} \nabla u_n \longrightarrow \nabla u^* \quad \text{dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega))^d) \text{ faible}$$

et

$$\gamma F_n(\nabla v) \longrightarrow \gamma \frac{k}{2} \nabla v \quad \text{dans } L^2(0,T; (L^2(\Omega))^d)$$

(grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue)

La deuxième intégrale du second membre de (4.28) tend vers 0; en effet

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) |F_n(\nabla v)| |\nabla u_n| \, dy &\leq \int_{Q_{2,n}} \gamma(t) k \frac{|\nabla v|^{1/2}}{\sqrt{\sigma_n}} |\nabla u_n| \, dy \leq \\ K_+ \left(\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^3 \frac{|\nabla v|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} \, dy \right)^{1/3} \left(\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} \, dy \right)^{2/3} &\leq \\ K_+ \left(\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4 |\nabla v|^2 \, dy \right)^{1/4} \left(\int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2} \, dy \right)^{1/12} \left(\int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} \, dy \right)^{2/3} \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2,n}} \frac{1}{\sigma_n^2} \, dy &\leq \frac{1}{3} \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_n} \, dy \leq \text{constante} \quad (\text{grâce à 4.17}) \\ \int_{Q_{2,n}} \frac{|\nabla u_n|^{3/2}}{\sqrt{\sigma_n}} \, dy &\leq \text{constante, qui résulte de (4.15) et de la relation} \end{aligned}$$

$$(1 + \sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2} - 1 \geq \frac{(\sigma_n(x) |\nabla u_n(y)|)^{1/2}}{2} \quad \text{dans } Q_{2,n}$$

donc la deuxième intégrale du second membre de (4.28) est majorée par

$$C_7 \left(\int_{Q_{2,n}} |\gamma(t)|^4 |\nabla v|^2 dy \right)^{1/2}, \quad C_7 \text{ indépendante de } n,$$

qui tend vers 0 car mes $(Q_{2,n})$ tend vers 0.

On va maintenant passer à la limite dans l'équation :

$$\int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, u_n) dt = \int_0^T \gamma(t) (f, u_n) dt - \int_0^T \gamma(t) \left(\frac{d}{dt} B u_n, u_n \right) dt$$

en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^T \gamma(t) \left(\frac{d}{dt} B u_n, u_n \right) dt = - \int_0^T \gamma'(t) \psi_n(t) dt$$

il vient alors (grâce à (4.19) et (4.22))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, u_n) dt = \int_0^T \gamma(t) (f, u^*) dt + \int_0^T \gamma'(t) \psi^*(t) dt$$

comme $u^* \in L^2(0, T; W)$, $\frac{d}{dt} (B u^*) \in L^2(0, T; W')$ et $\psi^* \in L^1(0, T)$, on peut intégrer par parties de nouveau (cf. lemme 2 de [24]), d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \gamma(t) (A_n u_n, u_n) dt = \int_0^T \gamma(t) (f, u^*) dt - \int_0^T \gamma(t) \left(\frac{d}{dt} B u^*, u^* \right) dt = \int_0^T \gamma(t) (A_*, u^*) dt$$

finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \int_0^T \gamma(t) (A_* - A^* v, u^* - v) dt \geq 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; W)$$

d'où il résulte, A^* étant continu, $A_* = A^* u^*$.

On a ainsi la convergence d'une suite extraite de u_n vers $u^* \in L^2(0, T; W)$ vérifiant (4.2), (4.3) et telle que $\frac{d}{dt} (B u^*) \in L^2(0, T; W')$.

(ii) Régularité de u^*

Par souci de simplification de la démonstration nous raisonnons formellement. Les estimations a priori qui suivent peuvent être établies rigoureusement à partir du schéma de semi-discrétisation (2.17), (2.18) (de façon analogue au point b.2 de la démonstration du théorème 1; cf. aussi la démonstration de la proposition 2).

mais
$$\int_{\Omega} \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{ds} \right|^2 dx + s \int_{\Omega} F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla \left(\frac{du_n}{ds} \right) = \left(f, s \frac{du_n}{ds} \right)$$

$$\int_{\Omega} F_n(\nabla u_n) \cdot \nabla \left(\frac{du_n}{ds} \right) dx = \frac{d}{ds} J_{A_n}(u_n), \quad \text{où } J_{A_n}$$

est la fonctionnelle associée à A_n par (2.13), et

$$\left(f, s \frac{du_n}{ds} \right) = \frac{d}{ds} (f, s u_n) - \left(\frac{df}{ds}, s u_n \right) - (f, u_n)$$

d'où, en intégrant de 0 à t,

(4.29)
$$\begin{aligned} \iint_{0\Omega} \phi \frac{s}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{ds} \right|^2 dx ds + t J_{A_n}(u_n(t)) &= \int_0^t J_{A_n}(u_n) ds \\ + t (f(t), u_n(t)) - \int_0^t s \left(\frac{df}{ds}, u_n \right) ds &- \int_0^t (f, u_n) ds \end{aligned}$$

le premier membre de (4.29) est alors majoré par

$$\begin{aligned} &\int_0^t J_{A_n}(u_n) ds + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V + \\ &\left(\int_0^t \|u_n\|_V^{3/2} ds \right)^{2/3} \left\{ \left(\int_0^t \|f\|_{V'}^3 ds \right)^{1/3} + t \left(\int_0^t \left\| \frac{df}{ds} \right\|_{V'}^3 ds \right)^{1/3} \right\} \end{aligned}$$

on a

$$J_{A_n}(u_n) \leq (A_n u_n, u_n)$$

et donc, grace à (4.15),

$$\int_0^t J_{A_n}(u_n) ds \leq \text{constante}$$

ce qui, joint à (4.12), (4.13), implique que le premier membre de (4.29) est majoré par

$$\text{constante} + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V$$

on a donc

$$(4.30) \quad t J_{A_n}(u_n(t)) \leq \text{constante} + t \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\|_V$$

de plus, la fonction ϕ_y ($y \in \mathbb{R}_+$) définit sur \mathbb{R}_+^* par

$$\phi_y(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{1+xy}{x^2} \right)^{3/2} - \frac{y}{x}$$

étant décroissante, on a pour $\sigma_n \leq \sigma_*$ ($\sigma_* \in \mathbb{R}_+^*$)

$$J_{A_n}(u_n(t)) \geq \frac{2}{3} \int_{\Omega} K \frac{(1+\sigma_* |\nabla u_n|)^{3/2}}{\sigma_*^2} dx - \int_{\Omega} K \frac{|\nabla u_n|}{\sigma_*} dx$$

et par suite, en utilisant (2.15),

$$(4.31) \quad J_{A_n}(u_n(t)) \geq C_1^* \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{3/2} dx - C_2^*, \quad C_1^* \text{ et } C_2^*$$

étant strictement positives et indépendantes de n .

Appliquant maintenant l'inégalité de Young au deuxième terme du second membre de (4.30), on tire alors de (4.30), (4.31) et (4.12) que

$$(4.32) \quad u_n \text{ est borné dans } L^\infty(0, T; V);$$

le second membre de (4.29) est finalement borné, d'où il résulte

$$(4.33) \quad \int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{t}{\sqrt{|u_n|}} \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 dx dt \leq \text{constante}$$

et a fortiori

$$(Bu_n - Bu^*, u_n - u^*) \geq C' \int_{\Omega} |u_n - u^*|^{3/2} dx$$

$$(A_n u_n - A_n u^*, u_n - u^*) \geq C' \int_{\Omega} |\nabla u_n - \nabla u^*|^{3/2} dx$$

où C' est une constante strictement positive indépendante de n

donc $u_n \longrightarrow u^*$ dans $L^\infty(0, T; V)$ fort

**5 - APPROXIMATION ET RESOLUTION NUMERIQUE
DU PROBLEME (\mathcal{P})**

On reprend le schéma de discrétisation en temps introduit au paragraphe 2.1 pour montrer l'existence d'une solution de (2.7), (2.8). $\Delta t = \frac{T}{N}, N \in \mathbf{N}^*$, étant un pas de discrétisation en temps, on approche (2.7), (2.8) par le schéma implicite

$$(5.1) \quad u^0 = u_0$$

$$(5.2) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} (Bu^{n+1} - B_u^n) v \, dx + (Au^{n+1}, v) = (f^n, v) \quad \forall v \in V, \\ n=0, 1, \dots, N-1$$

avec
$$f^n = \frac{t}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(t) \, dt$$

u^n étant connu, on sait (paragraphe 2.1) que l'équation (5.2) admet une solution unique $u^{n+1} \in V$: c'est le minimum de la fonctionnelle J_n de V dans \mathbb{R} définie par :

$$(5.3) \quad J_n(v) = \frac{1}{\Delta t} J_B(v) + J_A(v) - (f^n, v) - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} Bu^n v \, dx$$

J_A et J_B étant définies respectivement par (2.13), (2.14).

Après discrétisation en temps par le schéma ci-dessus, nous avons à chaque étape de temps, un problème non-linéaire à résoudre, qui, à un changement de notations près s'écrit

$$(5.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} Bu v \, dx + (Au, v) = (f, v) \end{array} \right. \quad \forall v \in V$$

(5.4) est équivalent au problème de minimisation

$$(5.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \end{array} \right. \quad \forall v \in V$$

où J est la fonctionnelle de V dans \mathbb{R} définie par

$$(5.6) \quad J(v) = J_B(v) + J_A(v) - (f, v)$$

5.1 - APPROXIMATION PAR ELEMENTS FINIS DU PROBLEME (5.4)

On suppose que Ω est un polygone de \mathbb{R}^2 ; soit \mathcal{T}_h une triangulation finie de Ω , régulière (au sens de [25]). On prend h égal à la longueur du plus grand côté des $T \in \mathcal{T}_h$ et on approche V par

$$V_h = \{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}); v_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

avec P_1 = espace des polynomes de degré ≤ 1 ; on a $V_h \subset V$ et on approche (5.4) (et 5.5) par le problème en dimension finie

$$(5.7) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} B u_h v_h \, dx + (A u_h, v_h) = (f, v_h) & \forall v_h \in V_h \\ u_h \in V_h \end{cases}$$

V_h étant un sous espace fermé de V , on a bien existence et unicité de u_h .

THEOREME 4

u (resp. u_h) étant la solution de (5.4) (resp. (5.7)) on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| u_h - u \|_V = 0$$

et quand $u \in W^{2,3/2}(\Omega)$, on a l'estimation

$$\| u_h - u \|_V \leq C h^{2/3} \| u \|_{W^{2,3/2}(\Omega)}^{2/3}$$

avec C indépendant de h et u .

La démonstration fait intervenir l'ellipticité des opérateurs A et B, au sens des lemmes suivants :

Lemme 4 On a $\forall v, \omega \in V$

$$(5.8) \quad (Av - A\omega, v - \omega) \geq C \frac{\left(\int_{\Omega} |\nabla v - \nabla \omega|^{3/2} dx \right)^{4/3}}{\left(\int_{\Omega} \{ (1 + \sigma |\nabla v|)^{1/2} + (1 + \sigma |\nabla \omega|)^{1/2} + 2 \}^3 dx \right)^{1/3}}$$

avec $C > 0$ indépendant de v et ω .

Lemme 5 On a $\forall v, \omega \in L^{3/2}(\Omega)$

$$(5.9) \quad \left(\int_{\Omega} (|v| + |\omega|)^{3/2} dx \right)^{3/2} \int_{\Omega} (Bv - B\omega)(v - \omega) dx \geq C \|v - \omega\|_{L^{3/2}(\Omega)}^2$$

avec $C > 0$ indépendant de v et ω .

Démonstration du lemme 4

Elle découle du lemme suivant que nous démontrons en annexe :

Lemme 6 On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(y)) \cdot (x - y) \geq \frac{1}{2} \frac{|x - y|^2}{(1 + |x|)^{1/2} + (1 + |y|)^{1/2} + 2}$$

\mathcal{F} étant l'application définie dans le lemme 1.

Soient $v, \omega \in V$; on alors

$$(5.10) \quad ((1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla\omega|)^{1/2} + 2) \frac{K}{\sigma} (\mathcal{E}(\sigma\nabla v) - \mathcal{E}(\sigma\nabla\omega)) \cdot (\nabla v - \nabla\omega) \geq \frac{K}{2} |\nabla v - \nabla\omega|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

on élève les deux membres de (5.10) à la puissance $\frac{3}{4}$, et après intégration, on obtient :

$$\int_{\Omega} \{ (1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla\omega|)^{1/2} + 2 \}^{3/4} \left\{ \frac{K}{\sigma} (\mathcal{E}(\sigma\nabla v) - \mathcal{E}(\sigma\nabla\omega)) \cdot (\nabla v - \nabla\omega) \right\}^{3/4} dx \geq \int_{\Omega} \left(\frac{K}{2}\right)^{3/4} |\nabla v - \nabla\omega|^{3/2} dx$$

on a

$$\begin{aligned} & \left((1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla\omega|)^{1/2} + 2 \right)^{3/4} \in L^4(\Omega) \\ & \left(\frac{K}{\sigma} (\mathcal{E}(\sigma\nabla v) - \mathcal{E}(\sigma\nabla\omega)) \cdot (\nabla v - \nabla\omega) \right)^{3/4} \in L^{4/3}(\Omega) \end{aligned}$$

d'où, à l'aide de l'inégalité de Holder (puis en revenant à la définition de A)

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \left((1+\sigma|\nabla v|)^{1/2} + (1+\sigma|\nabla\omega|)^{1/2} + 2 \right)^3 dx \right)^{1/4} (A v - A \omega, v - \omega)^{3/4} \geq \\ & \int_{\Omega} \left(\frac{K}{2}\right)^{3/4} |\nabla v - \nabla\omega|^{3/2} dx \end{aligned}$$

d'où (5.8).

Démonstration du lemme 5

Utilisant l'inégalité dans \mathbb{R}

$$\sqrt{2} (|x| + |y|)^{1/2} \left(\frac{x}{\sqrt{|x|}} - \frac{y}{\sqrt{|y|}} \right) (x-y) \geq |x-y|^2$$

il vient

$$(5.11) \quad \sqrt{2}(|v|+|\omega|)^{1/2} (Bv - B\omega)(v-\omega) \geq \phi |v-\omega|^2 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

alors, comme dans la démonstration du lemme 4, on élève les deux membres de (5.11) à la puissance $\frac{3}{4}$ et après intégration on obtient

$$(5.12) \quad \int_{\Omega} \phi^{3/4} |v-\omega|^{3/2} dx \leq 2^{3/8} \int_{\Omega} (|v|+|\omega|)^{3/8} ((Bv-B\omega)(v-\omega))^{3/4} dx$$

on a

$$(|v|+|\omega|)^{3/8} \in L^4(\Omega) \quad , \quad ((Bv-B\omega)(v-\omega))^{3/4} \in L^{3/4}(\Omega)$$

on déduit donc de (5.12) et de l'inégalité de Hölder :

$$\int_{\Omega} \phi^{3/4} |v-\omega|^{3/2} dx \leq 2^{3/8} \left(\int_{\Omega} (|v|+|\omega|)^{3/2} dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} (Bv-B\omega)(v-\omega) dx \right)^{3/4}$$

d'où (5.9).

Démonstration du théorème 4

Prenons $v_h = u_h$ dans (5.7) ; il vient

$$(5.13) \quad \int_{\Omega} \phi |u_h|^{3/2} dx + \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} ((1+\sigma|\nabla u_h|)^{1/2}-1) |\nabla u_h| dx = (f, u_h)$$

mais (inégalité de Young)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} ((1+\sigma|\nabla u_h|)^{1/2}-1) |\nabla u_h| dx &\geq \int_{\Omega} \frac{K}{\sqrt{\sigma}} |\nabla u_h|^{3/2} dx - \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} |\nabla u_h| dx \geq \\ &\geq \frac{1}{3} \int_{\Omega} \frac{K}{\sqrt{\sigma}} |\nabla u_h|^{3/2} dx - \frac{1}{3} \int_{\Omega} \frac{K}{\sqrt{\sigma}} dx \end{aligned}$$

et $\forall n > 0 \quad \exists C_n > 0$ tel que

$$(f, u_h) \leq \|f\|_V \|u_h\|_V \leq n \|u_h\|_V^{3/2} + C_n \|f\|_V^3$$

alors on déduit de (5.13) et (2.1)

$$(5.14) \quad \|u_h\|_V \leq C_1$$

où C_1 est une constante indépendante de h .

De même, en prenant $v=u$ dans (5.4) on obtient

$$(5.15) \quad \|u\|_V \leq C_1$$

Prenons maintenant $v=u_h-u$ dans (5.4); il vient

$$(5.16) \quad \int_{\Omega} Bu(u_h-u) \, dx + (Au, u_h-u) = (f, u_h-u)$$

on a aussi

$$(5.17) \quad \int_{\Omega} Bu_h(v_h-u_h) \, dx + (Au_h, v_h-u_h) = (f, v_h-u_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Par addition de (5.16) et (5.17) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Bu-Bu_h)(u_h-u) \, dx + (Au-Au_h, u_h-u) = \\ & \int_{\Omega} Bu_h(u-v_h) \, dx + (Au_h, u-v_h) + (f, v_h-u) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned}$$

mais

$$\int_{\Omega} Bu(v_h-u) + (Au, v_h-u) = (f, v_h-u) \quad \forall v_h \in V_h$$

d'où

$$(5.18) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (Bu_h-Bu)(u_h-u) \, dx + (Au_h-Au, u_h-u) = \\ \int_{\Omega} (Bu_h-Bu)(v_h-u) \, dx + (Au_h-Au, v_h-u) \end{cases} \quad \forall v_h \in V_h$$

On déduit de (5.8), (5.9), (5.14) et (5.15)

$$(5.19) \quad \int_{\Omega} (Bu_h - Bu)(u_h - u) \, dx + (Au_h - Au, u_h - u) \geq C_2 \|u_h - u\|_V^2$$

avec C indépendant de h et u , $C_2 > 0$

D'autre part, A et B étant holderiens d'exposant $1/2$ (proposition 1),

$$(5.20) \quad \left| \int_{\Omega} (Bu_h - Bu)(v_h - u) \, dx + (Au_h - Au, v_h - u) \right| \leq C_3 \|u_h - u\|_V^{1/2} \|v_h - u\|_V$$

avec C_3 indépendant de h et u

Alors, de (5.18), (5.19) et (5.20) on déduit

$$(5.21) \quad \|u_h - u\|_V^{3/2} \leq C_4 \|v_h - u\|_V \quad \forall v_h \in V_h \quad (C_4 = \frac{C_3}{C_2})$$

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$; on note $\Pi_h \phi$ l'interpolé linéaire de ϕ sur \mathcal{T}_h définie par

$$\Pi_h \phi \in V_h, \quad \Pi_h \phi(S) = \phi(S) \quad \forall S \text{ sommet de } \mathcal{T}_h$$

\mathcal{T}_h étant une triangulation régulière, il est standard ([25]) que

$$\|\Pi_h \phi - \phi\|_V \leq C h \|\phi\|_{W^{2,3/2}(\Omega)}$$

C indépendant de h et de ϕ

alors en prenant $v_h = \Pi_h \phi$ dans (5.21) on en déduit

$$(5.22) \quad \|u_h - u\|_V^{3/2} \leq C_4 (C h \|\phi\|_{W^{2,3/2}(\Omega)} + \|\phi - u\|_V) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

compte tenu de la densité de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans V , (5.22) implique la convergence de u_h vers u .

Si $u \in W^{2,3/2}(\Omega)$, on peut, puisque Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière lipschitzienne et donc $W^{2,3/2}(\Omega) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$, prendre pour v_h dans (5.21) l'interpolé linéaire $\Pi_h u$ de u sur \mathcal{T}_h . D'après [25]

$$(5.23) \quad \|\Pi_h u - u\|_V \leq C h \|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega)}$$

De (5.21) et (5.23) on déduit alors

$$\|u_h - u\|_V \leq (C_4 C)^{2/3} h^{2/3} \|u\|_{W^{2,3/2}(\Omega)}$$

ce qui termine la démonstration du théorème.

Remarque 5.1 : Soient ϕ_h, K_h, σ_h les fonctions constantes sur chaque élément de \mathcal{T}_h définies par :

$$\phi_h|_T = \frac{1}{\text{mes } T} \int_T \phi(x) dx ; K_h|_T = \frac{1}{\text{mes } T} \int_T K(x) dx ; \sigma_h|_T = \frac{1}{\text{mes } T} \int_T \sigma(x) dx$$

Notons B_h (resp. A_h) l'opérateur associé à ϕ_h (resp. K_h et σ_h) par (2.3) (resp. (2.2)). Soit $u_h^* \in V_h$ la solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega} B u_h^* v_h dx + (A u_h^*, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Alors, u étant la solution de (5.4), on a encore en adaptant la démonstration précédente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h^* - u\|_V = 0$$

et, quand $u \in W^{2,3/2}(\Omega)$ et ϕ, K, σ lipschitziens, on a l'estimation d'erreur $\|u_h^* - u\|_V = O(h^{2/3})$.

5.2 - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME DISCRET (5.7)

Il y a équivalence entre le problème (5.7) et le problème de minimisation

$$(5.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} J(u_h) \leq J(v_h) \\ u_h \in V_h \end{array} \right. \quad \forall v_h \in V_h$$

J étant définie par (5.6).

On va résoudre (5.24) par une méthode de lagrangien augmenté [26]. Pour obtenir un programme manipulable numériquement on supposera que les coefficients ϕ , K , σ des opérateurs A et B sont constants sur chaque triangle de \mathcal{T}_h (cf. remarque 5.1). Introduisons alors l'espace W_h des fonctions constantes sur les triangles de \mathcal{T}_h

$$W_h = \{ q_h ; q_h|_T \in \mathbb{R}^2 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

Le lagrangien augmenté est défini, pour $R > 0$, par

$$(5.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_R(v_h, q_h, \mu_h) &= \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |v_h|^{3/2} dx + \frac{2}{3} \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma^2} (1 + \sigma |q_h|)^{3/2} dx - \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} |q_h| dx \\ &- (f, v_h) + \frac{R}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_h - q_h|^2 dx + \int_{\Omega} \mu_h \cdot (\nabla v_h - q_h) dx \end{aligned} \right.$$

sur $V_h \times W_h \times W_h$.

PROPOSITION 6

\mathcal{L}_R admet sur $V_h \times W_h \times W_h$ un point selle unique, de la forme $(u_h, \nabla u_h, \lambda_h)$, u_h solution de (5.24) et $\lambda_h = F(\nabla u_h)$.

Démonstration

V_h et W_h étant de dimension finie, la contrainte $q_h = \nabla v_h$ étant linéaire et (5.24) admettant une solution, alors \mathcal{L}_R possède un point selle (u_h, p_h, λ_h) (cf. par exemple [27]). On a

$$(5.26) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_R(u_h, p_h, \mu_h) &\leq \mathcal{L}_R(u_h, p_h, \lambda_h) \leq \mathcal{L}_R(v_h, q_h, \lambda_h) \\ \forall (v_h, q_h, \mu_h) &\in V_h \times W_h \times W_h \end{aligned} \right.$$

De la première inégalité (5.26) on déduit

$$\int_{\Omega} \mu_h \cdot (\nabla u_h - p_h) \, dx \leq \int_{\Omega} \lambda_h \cdot (\nabla u_h - p_h) \, dx \quad \forall \mu_h \in W_h$$

d'où $p_h = \nabla u_h$.

De la seconde inégalité (5.26) on déduit ensuite

$$J(u_h) = \mathcal{L}_R(u_h, p_h, \lambda_h) \leq \mathcal{L}_R(v_h, q_h, \lambda_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in V_h \times W_h$$

qui implique

$$J(u_h) \leq \mathcal{L}_R(v_h, \nabla u_h, \lambda_h) = J(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

ce qui montre que u_h est solution de (5.24).

Enfin, de l'inégalité

$$\mathcal{L}_R(u_h, \nabla u_h, \lambda_h) \leq \mathcal{L}_R(u_h, q_h, \lambda_h) \quad \forall q_h \in W_h$$

on déduit facilement

$$\int_{\Omega} F(\nabla u_h) \cdot q_h \, dx = \int_{\Omega} \lambda_h \cdot q_h \, dx \quad \forall q_h \in W_h$$

et par suite, puisque $F(\nabla u_h) \in W_h$, $\lambda_h = F(\nabla u_h)$.

On applique l'algorithme d'Uzawa au lagrangien \mathcal{L}_R , d'où

$$(5.27) \quad \lambda^0 \in W_h, \quad \text{arbitrairement choisi}$$

λ^m connu, on détermine (u^m, p^m) puis λ^{m+1} par

$$(5.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_R(u^m, p^m, \lambda^m) \leq \mathcal{L}_R(v_h, q_h, \lambda^m) \\ (u^m, p^m) \in V_h \times W_h \end{array} \right. \quad \forall (v_h, q_h) \in V_h \times W_h$$

$$(5.29) \quad \lambda^{m+1} = \lambda^m + \rho^m (\nabla u^m - p^m), \quad \rho^m > 0$$

Il est facile de voir que la résolution de (5.28) est équivalente à celle des deux équations couplées :

$$(5.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} B u^m v_h dx + R \int_{\Omega} \nabla u^m \cdot \nabla v_h dx = R \int_{\Omega} p^m \cdot \nabla v_h dx + (f, v_h) - \int_{\Omega} \lambda^m \cdot \nabla v_h dx \\ \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F(p^m) \cdot q_h dx + R \int_{\Omega} p^m \cdot q_h dx = R \int_{\Omega} \nabla u^m \cdot q_h dx + \int_{\Omega} \lambda^m \cdot q_h dx \\ \forall q_h \in W_h \end{array} \right.$$

On a, en fait, choisi de découpler les deux équations (5.30) et (5.31) en remplaçant dans (5.30) p^m par p^{m-1} . Cette variante simplifiée de l'algorithme d'Uzawa est considérée dans [26]. Elle s'écrit

$$(5.32) \quad (p^0, \lambda^1) \in W_h \times W_h, \quad \text{arbitrairement choisi}$$

(p^{m-1}, λ^m) connu, on détermine successivement u^m, p^m, λ^{m+1} par

$$(5.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} B u^m v_h dx + R \int_{\Omega} \nabla u^m \cdot \nabla v_h dx = R \int_{\Omega} p^{m-1} \cdot \nabla v_h dx - (f, v_h) - \int_{\Omega} \lambda^m \cdot \nabla v_h dx \\ u^m \in V_h \end{array} \right. \quad \forall v_h \in V_h$$

$$(5.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} F(p^m) \cdot q_h dx + R \int_{\Omega} p^m \cdot q_h dx = R \int_{\Omega} \nabla u^m \cdot q_h dx + \int_{\Omega} \lambda^m \cdot q_h dx \\ p^m \in W_h \end{array} \right. \quad \forall q_h \in W_h$$

$$(5.35) \quad \lambda^{m+1} = \lambda^m + \rho (\nabla u^m - p^m), \quad \rho > 0$$

Proposition 7

Si $0 < \rho < \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) R$, on a pour l'algorithme (5.32), (5.33), (5.34), (5.35), lorsque $m \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} u^m &\longrightarrow u_h && \text{dans } V_h \\ p^m &\longrightarrow \nabla u_h && \text{dans } W_h \\ \lambda^m &\longrightarrow F(\nabla u_h) && \text{dans } W_h \end{aligned}$$

où u_h est la solution de (5.24).

Démonstration

Il découle du lemme 6 que l'application

$$q_h \longrightarrow \frac{2}{3} \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma^2} (1 + \sigma |q_h|^{3/2}) dx - \int_{\Omega} \frac{K}{\sigma} |q_h| dx$$

est uniformément convexe sur les bornées de W_h , au sens de [28]. Le résultat est alors une conséquence d'un théorème général de convergence (théorème) de [26].

p^{m-1} et λ^m connus, (5.33) est l'équation discrète d'un problème du type faiblement non linéaire étudié dans [26]. Comme dans [26], on la résout par l'intermédiaire d'un lagrangien augmenté convenable; nous donnerons, au paragraphe 5.2.2, la partie algorithmique de résolution. Auparavant nous allons voir que (5.34) est résoluble explicitement.

5.2.1 - Résolution du (5.34)

Supposons λ^m et u^m connus. L'équation (5.34) équivaut à un système de 2 Card (\mathcal{T}_h) équations non linéaires, lequel se décompose en Card (\mathcal{T}_h) systèmes, indépendants les uns des autres, de deux équations non linéaires à deux inconnues, admettant chacun une solution unique dans \mathbb{R}^2 ; de façon précise, on détermine p^m en résolvant pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ le système :

$$(5.36) \quad F(p^m) + R p^m = R \nabla u^m + \lambda^m \quad \text{dans } T$$

Pour cela, posons

$$r^m = R \nabla u^m + \lambda^m$$

$$s^m = \frac{(1 + \sigma |P^m|)^{1/2} - 1}{\sigma |p^m|} p^m = \frac{F(P^m)}{K}$$

un calcul facile montre que la relation précédente équivaut à

$$p^m = 2 s^m + \sigma s^m |s^m|$$

(5.36) s'écrit alors

$$R\sigma s^m |s^m| + (K+2R) s^m = r^m$$

d'où l'on tire

$$(5.37) \quad |s^m| = \frac{2|r^m|}{((2R+K)^2 + 4R\sigma|r^m|)^{1/2} + 2R+K}$$

puis

$$(5.38) \quad s^m = \frac{2r^m}{((2R+K)^2 + 4R\sigma|r^m|)^{1/2} + 2R+K}$$

La solution de (5.36) est alors donnée par

$$(5.39) \quad p^m = (2 + \sigma |s^m|) s^m$$

5.2.2 - Résolution de (5.33)

p^{m-1} et λ^m étant donnés dans W_h , on définit $f_1^m \cdot v_h$ par :

$$(f_1^m, v_h) = R \int_{\Omega} p^{m-1} \cdot \nabla v_h \, dx + (f, v_h) - \int_{\Omega} \lambda^m \cdot \nabla v_h \, dx$$

La résolution de (5.33) équivaut à celle du problème de minimisation

$$(5.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{J}(u^m) \leq \bar{J}(v_h) \\ u^m \in V_h \end{array} \right. \quad \forall v_h \in V_h$$

où \bar{J} est la fonction définie sur V_h par

$$\bar{J}(v_h) = \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |v_h|^{3/2} dx - (f_1^m, v_h) + \frac{R}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx$$

On introduit l'espace d'éléments finis discontinus aux interfaces de \mathcal{T}_h

$$\tilde{W}_h = \{ q_h ; q_h|_T \in P_1 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

avec P_1 = espace des polynômes de degré ≤ 1 .

Le lagrangien augmenté est défini, pour $\tilde{R} > 0$, par

$$(5.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\tilde{R}}(v_h, q_h, \tilde{u}_h) = \frac{R}{2} \int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx + \frac{2}{3} \int_{\Omega} \phi |q_h|^{3/2} dx - (f_1^m, v_h) \\ + \int_{\Omega} \mu_h (v_h - q_h) dx + \frac{\tilde{R}}{2} \int_{\Omega} |v_h - q_h|^2 dx \end{array} \right.$$

sur $V_h \times \tilde{W}_h \times \tilde{W}_h$.

On vérifie facilement que si $(u_h, p_h, \tilde{\lambda}_h)$ est point selle de $\mathcal{L}_{\tilde{R}}$, alors $q_h = p_h = u^m$ et $\tilde{\lambda}_h = \frac{1}{\phi} B u^m$, où u^m est solution de (5.40).

Pour obtenir un algorithme dans lequel le traitement de la non linéarité est local, on introduit une formule de quadrature pour approcher les intégrales des fonctions de \tilde{W}_h intervenant dans (5.41). Dans chaque triangle T de \mathcal{T}_h on considère trois points d'intégration numérique x_{iT} , $i=1,2,3$, affectés d'un poids ω_{iT} (par exemple les sommets de T affectés du poids $\frac{1}{3}$, cf. [26]) de sorte que

$$\int_T \theta(x) dx = \text{aire}(T) \sum_{i=1}^3 \omega_{iT} \theta(x_{iT})$$

Alors $\mathcal{L}_{\tilde{R}}$ est approché par

$$(5.42) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_{\tilde{R}}(v_h, q_h, \bar{u}_h) &= \frac{R}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 dx - (f_1^m, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \text{aire}(T) \sum_{i=1}^3 \omega_{iT} \\ & \left[\frac{2}{3} \phi(x_{iT})(q_h(x_{iT}))^{3/2} + \bar{u}_h(x_{iT})(v_h(x_{iT}) - q_h(x_{iT})) + \frac{\tilde{R}}{2} |v_h(x_{iT}) - q_h(x_{iT})|^2 \right] \end{aligned} \right.$$

Notons d_1 la dimension de V_h , d_2 celle de \tilde{W}_h , et $\underline{v}, \underline{q}, \underline{u}$, les vecteurs de $\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{R}^{d_2}$, dont les composantes sont les degrés de liberté associés respectivement à v_h, q_h, \bar{u}_h . On désigne par S l'opérateur linéaire de \mathbb{R}^{d_1} dans \mathbb{R}^{d_2} défini par

$$S\underline{v} = (v_h(x_{iT})) \quad 1 \leq i \leq 3, \quad T \in \mathcal{T}_h,$$

par M l'opérateur de \mathbb{R}^{d_2} dans lui même associé au produit scalaire de $L^2(\Omega)$

$$(M \underline{p}, \underline{q})_{\mathbb{R}^{d_2}} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \text{aire}(T) \sum_{i=1}^3 \omega_{iT} p_h(x_{iT}) q_h(x_{iT})$$

et par L l'opérateur de \mathbb{R}^{d_1} dans lui même défini par

$$(L \underline{u}, \underline{v})_{\mathbb{R}^{d_1}} = R \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h dx$$

Enfin, $B\underline{q}$ désigne le vecteur de \mathbb{R}^{d_2} obtenu en appliquant B à chacune des composantes de \underline{q} , et \underline{f}_1 le vecteur de \mathbb{R}^{d_1} défini par $(f_1, \underline{v}) = (f_1^m, v_h)$

L'algorithme de type Uzawa appliqué à $\mathcal{L}_{\tilde{R}h}$ conduit alors à (cf. [26])

$$(5.43) \quad \lambda^0 \quad \text{arbitrairement choisi}$$

$$(5.44) \quad \lambda^j \quad \text{étant connu, on prend } \underline{u}^{j,0} = \underline{u}^{j-1}, \text{ puis pour } k \geq 0$$

$$\underline{u}^{j,k} \quad \text{étant connu, on résoud successivement}$$

$$(5.45) \quad B\underline{p}^{j,k+1} + \tilde{R} \underline{p}^{j,k+1} = \lambda^j + \tilde{R} S \underline{u}^{j,k}$$

$$(5.46) \quad (L + \tilde{R} S^t MS) \underline{u}^{j,k+1} = S^t M (\underline{p}^{j,k+1} - \underline{\lambda}^j) + \underline{\xi}_1$$

lorsque la différence entre deux itérés successifs est inférieure à un seuil, choisi à l'avance, on calcule $\underline{\lambda}^{j+1}$ par

$$(5.47) \quad \underline{\lambda}^{j+1} = \underline{\lambda}^j + \rho(S\underline{u}^{j,k+1} - \underline{p}^{j,k+1}), \quad \rho > 0$$

Quant à la résolution de (5.45), elle est ici explicite. On pose

$$\underline{r} = \underline{\lambda}^j + \tilde{R} S \underline{u}^{j,k}, \quad \underline{p} = \underline{p}^{j,k+1}$$

puis

$$\xi(i) = \frac{1}{\phi} (Bp)(i)$$

pour chaque composante d'indice i , ce qui équivaut à

$$p(i) = \xi(i) |\xi(i)|$$

alors (5.45) s'écrit

$$\phi \xi(i) + \tilde{R} \xi(i) |\xi(i)| = \underline{r}(i)$$

d'où

$$(5.48) \quad \xi(i) = \frac{2\underline{r}(i)}{(\phi^2 + 4\tilde{R}|\underline{r}(i)|)^{1/2} + \phi}$$

puis

$$(5.49) \quad p(i) = \xi(i) |\xi(i)|$$

5.3 - RESOLUTION NUMERIQUE DU PROBLEME D'EVOLUTION (5.1), (5.2)

L'organigramme de résolution du problème (5.1), (5.2) est le suivant :

1°) On discrétise le domaine Ω par une triangulation \mathcal{T}_h régulière; on approche les coefficients ϕ, K, σ par ϕ_h, K_h, σ_h constants sur chaque élément de \mathcal{T}_h (cf. remarque 5.1).

2°) On choisit les paramètres R et \tilde{R} des Lagrangiens \mathcal{L}_R et $\mathcal{L}_{\tilde{R}}$; on effectue une fois pour toutes la factorisation par Cholesky de la matrice $\mathcal{M}_{\phi=L+\tilde{R}^t S^t} MS$.

3°) On se donne, à l'instant initial, p^0, λ^1 dans W_h et λ^0 dans \mathbb{R}^d .

4°) On connaît la solution u_n à l'instant $n\Delta t$ et $f_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} f(t) dt$

5°) p^{m-1} et λ^m étant connus, on calcule $f_m \in V'_h$ par $(f_m, v) = \Delta t (f_m, v) + \int_{\Omega} B u_m v dx + \int_{\Omega} (R p^{m-1} - \lambda^m) \cdot \nabla v dx$

6°) On calcule u^m par l'algorithme suivant :

6.a) λ^j connu, on calcule p^j et \underline{u}^j , comme au paragraphe 5.2.2, solutions de :

$$B p^j + \tilde{R} p^j = \lambda^j + \tilde{R} S \underline{u}^j$$

$$\mathcal{M} \underline{u}^j = S^t M (\tilde{R} p^j - \lambda^j) + \underline{f}^m$$

6.b) On calcule $\lambda^{j+1} = \lambda^j + \tilde{R} (S \underline{u}^j - p^j)$

6.c) On fait un test de convergence : s'il y a convergence on pose $u^m = \underline{u}^j$ sinon on fait $j \rightarrow j+1$ et on retourne en 6.a).

7°) On calcule p^m , comme au paragraphe 5.2.1, solution, dans chaque élément de h , de

$$\Delta t F(p^m) + R p^m = R \nabla u^m + \lambda^m$$

8°) On calcule $\lambda^{m+1} = \lambda^m + R(\nabla u^m - p^m)$

9°) On fait un test de convergence : s'il y a convergence on pose $u_{n+1} = u^m$ sinon on fait $m \rightarrow m+1$ et on retourne en 5°).

10°) u_{n+1} étant connu, si on désire la solution à l'instant $(n+2)\Delta t$, on fait $n \rightarrow n+1$ et on retourne en 4°).

5.4 - RESULTATS NUMERIQUES

Nous présentons des résultats numériques pour un écoulement radial circulaire autour d'un puits de rayon r_w . Avec les notations physiques introduites en 1., la "p²-pression" $u(r,t)$ est solution du problème

$$(5.50) \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{\sqrt{|u|}} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q) = 0 \quad \text{dans }]r_w, r_e[\times]0, T[,$$

r_e étant le rayon de drainage

avec

$$q = \frac{\alpha u - ((\alpha u)^2 + 2\beta b \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^{1/2})}{2\beta \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$(5.51) \quad u(r,0) = u_0(r) \quad , \quad r \in]r_w, r_e[$$

$$(5.52) \quad q|_{r=r_w} = q_w \quad , \quad \text{débit massique de production, constant}$$

$$(5.53) \quad q|_{r=r_e} = 0$$

En introduisant les grandeurs adimensionnelles

$$\xi = \frac{r}{r_e}, \quad P = \frac{P}{P_0}, \quad Q = -\frac{q}{q_w},$$

$$\alpha_d = -\frac{\alpha \mu q_w r_e}{b P_0^2}, \quad \beta_d = \frac{\beta q_w^2 r_e}{b P_0^2},$$

$$\tau = -\frac{q_w t}{\phi b P_0 r_e}, \quad U = P^2,$$

les équations (5.50), ..., (5.53) prennent la forme adimensionnelle

$$(5.54) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{U}{\sqrt{|U|}} \right) - \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi Q) = 0 \quad \text{dans }]\xi_w, 1[\times]0, \tau_T[$$

$$\left(\tau_T = -\frac{q_w T}{\phi b P_0 r_e} \right)$$

avec

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \alpha_d Q + \beta_d Q |Q|$$

$$(5.55) \quad U(\xi, 0) = 1 \quad \text{dans }]\xi_w, 1[$$

$$(5.56) \quad Q|_{\xi=\xi_w} = -1$$

$$(5.57) \quad Q|_{\xi=1} = 0$$

L'équation variationnelle associée s'écrit

$$(5.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} \int_{\xi_w}^1 \frac{U}{\sqrt{|U|}} v \xi \, d\xi + \int_{\xi_w}^1 Q \frac{\partial v}{\partial \xi} \xi \, d\xi = \xi_w v(\xi_w) \\ \forall v \in W^{1,3/2}(\xi_w, 1), \text{ p.p. sur }]0, \tau_T[\end{array} \right.$$

la condition initiale étant (5.55).

Remarque 5.2 : Avec les hypothèses du paragraphe 3, on a existence d'une solution de (5.54), (5.55), continue sur $[\xi_w, 1] \times [0, \tau_T]$; on a donc existence locale et unicité d'une solution positive.

Nous avons appliqué à (5.58), (5.55) la méthode d'approximation et de résolution décrite précédemment. En ce qui concerne la formule d'intégration numérique (cf. 5.2.2) on a pris sur chaque segment $[\xi_i, \xi_{i+1}] \subset [\xi_w, 1]$,

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \theta(\xi) \xi \, d\xi = \omega_{i1} \theta(\xi_i) + \omega_{i2} \theta(\xi_{i+1})$$

avec

$$\omega_{i1} = \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\xi_{i+1} - \xi) \xi \, d\xi,$$

$$\omega_{i2} = \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (\xi - \xi_i) \xi \, d\xi$$

La matrice $S=(S_{ij})$ est donnée par

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \text{partie entière de } \frac{i+2}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5.4.1 - Données

- Données physiques

$r_w = 10\text{cm}$, $r_e = 300\text{m}$, $k = \frac{1}{\alpha} = 100\text{md}$, $\phi = 0.1$, $P_0 = 100$ bars, $b = 10^{-9}$ unité CGS. On a effectué les calculs de U correspondant à quatre valeurs de q_w (en unité CGS) : -0.105 , -0.140 , -0.175 , -0.210 (pour une couche de 10m de hauteur, 0.105 correspond alors à un débit de $10^6 \text{N m}^3/\text{jour}$). Enfin, on a considéré dans chacun de ces cas deux valeurs de β : $5 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-1}$ et 0 .

- Discretisation

On a pris 31 points sur l'intervalle $[\xi_w, 1]$, avec un pas logarithmique.

$\Delta\tau$ est choisi constant égal à 0.2 .

- Choix des paramètres

Les notations étant celles du paragraphe 5.3, on a pris

$$R = 10^{-2}, \bar{R} = 4,$$
$$p^0 = 1, \lambda^1 = 0, \lambda^0 = 0$$

On a choisi, pour arrêter les itérations (en j) dans l'algorithme 6.a-6.b-6.c, le test

$$\frac{\sum_{i=1}^{60} |u_i^{j+1} - u_i^j|}{\sum_{i=1}^{60} |u_i^{j+1}|} < 10^{-5}$$

et, pour arrêter les itérations (en m) dans l'algorithme 5°-6°-7°-8°, le test

$$\frac{\sum_{i=1}^{31} |u_i^{m+1} - u_i^m|}{\sum_{i=1}^{31} |u_i^{m+1}|} < 10^{-5}$$

5.4.2 - Résultats

Nous indiquons ci-dessous la valeur moyenne des nombres nrelax (itérations de relaxations dans 6.a), niteri (itérations internes dans 6.a-6.b-6.c) et niterex (itérations externes dans 5°-6°-7°-8°) d'itérations par pas de temps.

Au premier pas de temps :

$$nrelax = 11, niteri = 6, niterex = 18$$

Du deuxième au sixième pas de temps :

$$nrelax = 6, niteri = 4, niterex = 4$$

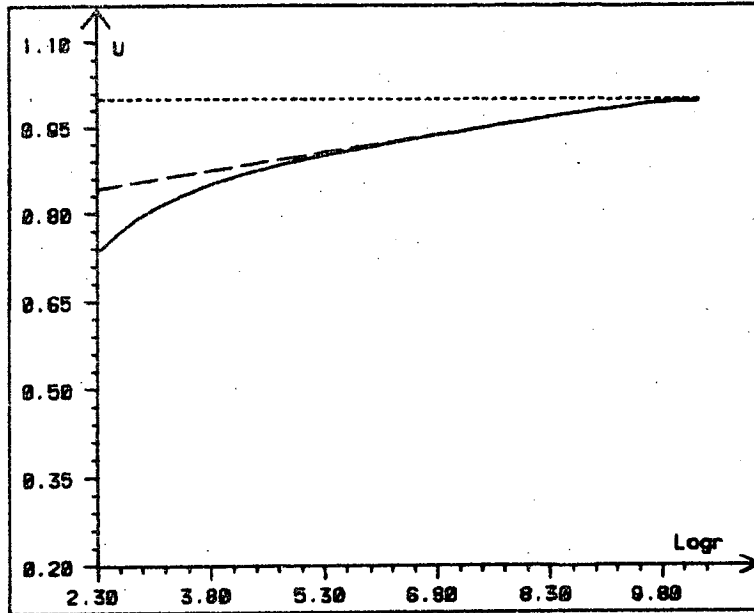
A partir du septième pas de temps :

$$nrelax = 4, niteri = 2, niterex = 3$$

Les résultats, après 30 pas de temps, sont présentés figures 5.1 à 5.6. On observe que "loin du puits" ($\geq 10\text{m}$ pour $q_w = -0.210$) les courbes de U, correspondant aux deux valeurs de β , coïncident. Mais au puits, on a, pour les valeurs de U, les écarts suivants :

- pour $q_w = -0.105$, 14,6%
- pour $q_w = -0.140$, 31,7%
- pour $q_w = -0.175$, 67,3%
- pour $q_w = -0.210$, 160,0%

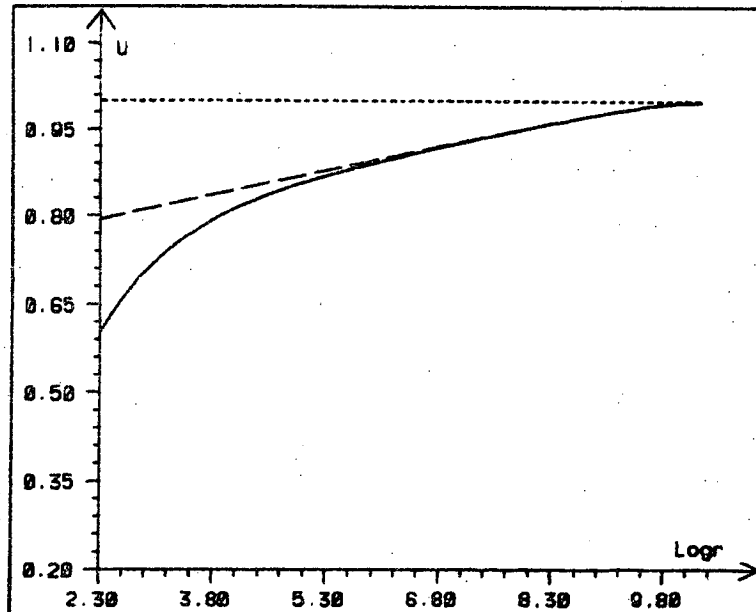
I.N.R.I.A.



qw = -0.105
temps de simulation = 5H
- - - beta = 0.
— beta = 5.00E+06

Figure 5.1

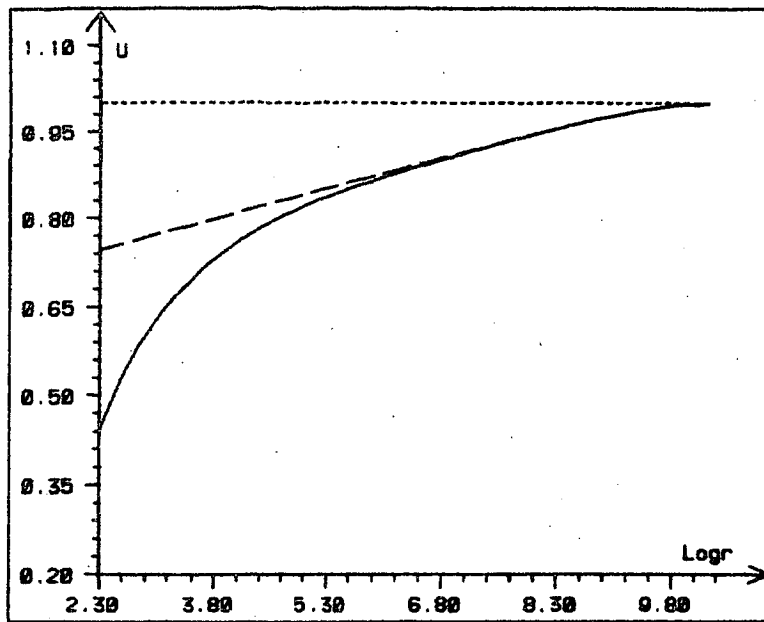
I.N.R.I.A.



qw = -0.140
temps de simulation = 5H
- - - beta = 0.
— beta = 5.00E+06

Figure 5.2

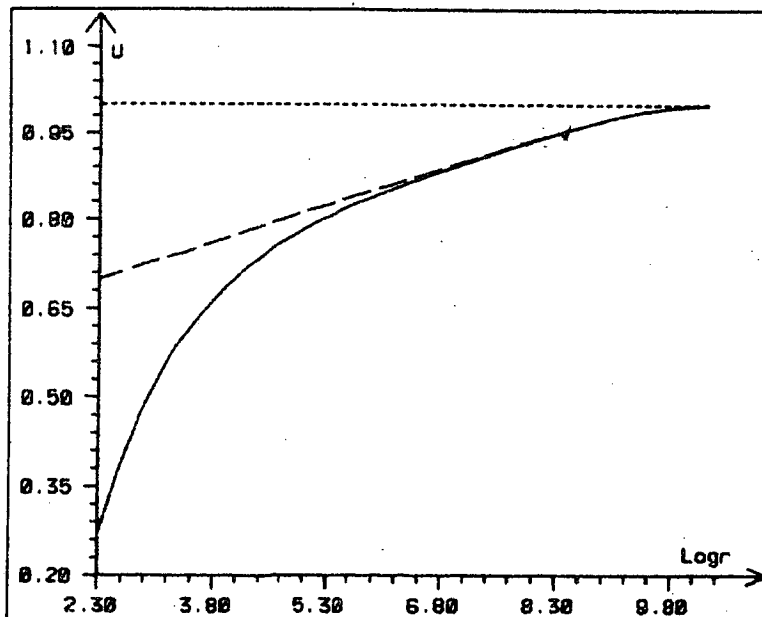
I.N.R.I.A.



qw = -0.175
temps de simulation = 5H
--- beta = 0.
— beta = 5.00E+06

Figure 5.3

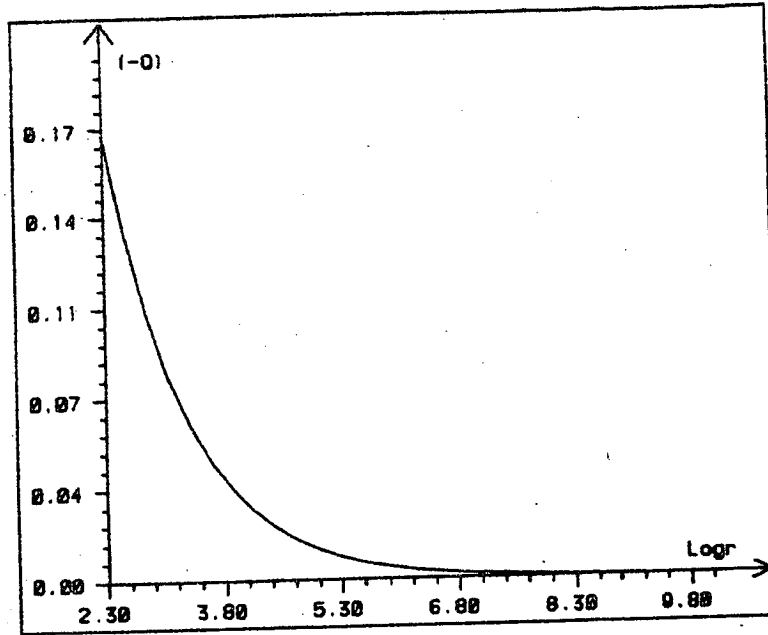
I.N.R.I.A.



qw = -0.210
temps de simulation = 5H
--- beta = 0.
— beta = 5.00E+06

Figure 5.4

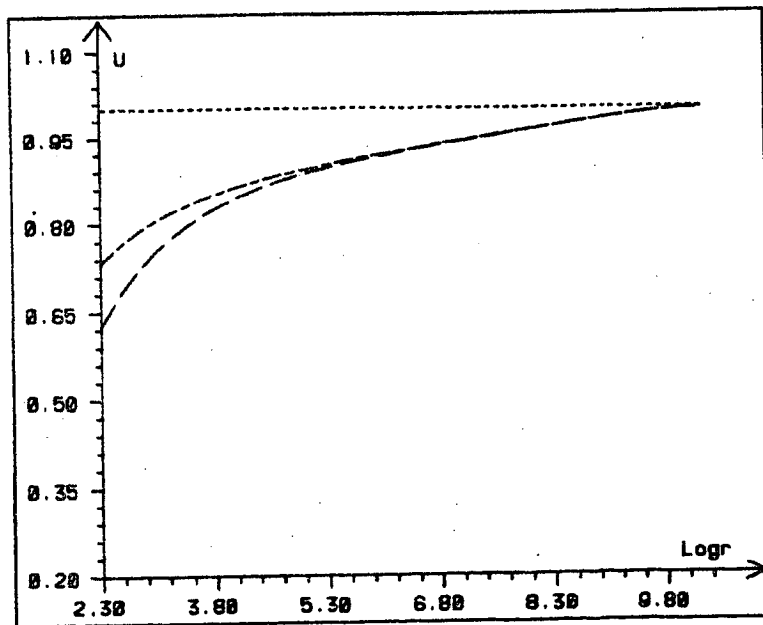
I.N.R.I.A.



beta = 5.00E+06
temps de simulation = 5H

Figure 5.5

I.N.R.I.A.



qw = -0.105
temps de simulation = 5H
--- beta = 5.00E+06
— beta = 1.00E+07

Figure 5.6

ANNEXE

Soit \mathcal{F} l'application de \mathbb{R}^d dans lui-même, définie par

$$\mathcal{F}(v) = \frac{(1+|v|)^{1/2}-1}{|v|}v, \quad || \text{ étant la norme euclidienne dans } \mathbb{R}^d,$$

On a

Lemme 0.1 : \mathcal{F} est holdérienne d'exposant 1/2

Démonstration :

Soient $v, w \in \mathbb{R}^d$. Nous distinguerons trois cas :

(i) v et w sont colinéaires; il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$.

Si $\lambda = 0$ le résultat est immédiat

$$\text{Si } \lambda > 0 \quad \left| \frac{\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)}{|v-w|^{1/2}} \right| = \left| \frac{(1+|v|)^{1/2} - (1+|w|)^{1/2}}{|v|} \right| \leq \left| |v| - |w| \right|^{1/2} \leq$$

$$\text{Si } \lambda < 0 \quad \left| \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) \right| = \left[(1+|v|)^{1/2} - 1 \right] + \left[(1+|w|)^{1/2} - 1 \right] \leq |v|^{1/2} + |w|^{1/2}$$

puis, tenant compte de $|v-w| \geq \max(|v|, |w|)$, il vient

$$\left| \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) \right| \leq 2 |v-w|^{1/2}$$

(ii) v et w ont même norme, $|v| = |w| = r > 0$; alors

$$\left| \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) \right| = \frac{(1+r)^{1/2} - 1}{r} |v-w| \leq \frac{|v-w|}{\sqrt{r}}$$

mais $|v-w|^{1/2} \leq \sqrt{2} \sqrt{r}$

donc $\left| \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w) \right| \leq \sqrt{2} |v-w|^{1/2}$

(iii) v et w n'ont pas même norme; supposons $0 < |v| < |w|$. Soit \bar{w} la projection de w sur la boule fermée centrée à l'origine et de rayon $|v|$; on a $|w-\bar{w}| \leq |v-w|$

Ecrivons

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| \leq |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w})| + |\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w)|$$

v et \bar{w} ayant même norme, on a, d'après (ii)

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w})| \leq \sqrt{2} |v - \bar{w}|^{1/2}$$

w et \bar{w} étant colinéaires, on a, d'après (i)

$$|\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w)| \leq 2 |w - \bar{w}|^{1/2}$$

donc

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| &\leq \sqrt{2} |v - \bar{w}|^{1/2} + 2 |w - \bar{w}|^{1/2} \leq \sqrt{2} (|v - w| + |w - \bar{w}|)^{1/2} + \\ &2 |w - \bar{w}|^{1/2} \leq \sqrt{2} (2|v - w|)^{1/2} + 2|v - w|^{1/2} = 4 |v - w|^{1/2} \end{aligned}$$

LEMME 0.2 On a $\forall v, w \in \mathbb{R}^d$

$$(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v - w) \geq \frac{1}{2} \frac{|v - w|^2}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2} + 2}$$

(,) désignant le produit scalaire dans \mathbb{R}^d

Démonstration

Comme dans la démonstration précédente, on distinguera trois cas

(i) v et w sont colinéaires; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$.

Si $\lambda = 0$ le résultat est immédiat

Si $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v - w) &= (1 - \lambda) ((1 + |v|)^{1/2} - (1 + \lambda |v|)^{1/2}) |v| = \\ &= \frac{(1 - \lambda)^2 |v|^2}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + \lambda |v|)^{1/2}} = \frac{|v - w|^2}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2}} \geq \\ &= \frac{|v - w|^2}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2} + 2} \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v-w) &= (1-\lambda) [(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} - 2] |v| = \\ &= (1-\lambda) \left[\frac{(1-\lambda)|v| + 2(1+|v|)^{1/2}(1+|w|)^{1/2} - 2}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \right] |v| \geq \\ &= \frac{(1-\lambda)^2 |v|^2}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} = \frac{|v-w|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \end{aligned}$$

(ii) v et w ont même norme; alors

$$(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v-w) = \frac{(1+|v|)^{1/2} - 1}{|v|} |v-w|^2 = \frac{|v-w|^2}{(1+|v|)^{1/2} + 1}$$

(ii) v et w n'ont pas même norme; supposons $0 < |v| < |w|$. Soit \bar{w} la projection de w sur la boule fermée centrée à l'origine et de rayon $|v|$.
Ecrivons :

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v-w) &= (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w}), v-\bar{w}) + (\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w), \bar{w}-w) \\ (0.1) \quad &+ (\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w), v-\bar{w}) + (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w}), \bar{w}-w) \end{aligned}$$

v et \bar{w} ayant même norme, on a, d'après (ii)

$$(0.2) \quad (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w}), v-\bar{w}) \geq \frac{|v-\bar{w}|^2}{(1+|v|)^{1/2} + 1} \geq \frac{|v-\bar{w}|^2}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2}$$

w et \bar{w} étant colinéaires, on a, d'après (i)

$$(0.3) \quad (\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w), \bar{w}-w) \geq \frac{|w-\bar{w}|^2}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2}$$

le dernier terme du second membre de (0.1) est positif, puisque

$$(0.4) \quad (\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w}), \bar{w}-w) = \frac{(1+|v|)^{1/2} - 1}{|v|} (v-\bar{w}, \bar{w}-w) \geq 0$$

(propriété de la projection).

Quant au troisième terme de (0.1), on a, en posant $w = \lambda \bar{w}$, $|\lambda| > 1$

$$(0.5) \left\{ \begin{aligned} (\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w), v - \bar{w}) &= [(1 + |\bar{w}|)^{1/2} - 1 - ((1 + |\lambda| |\bar{w}|)^{1/2} - 1) \frac{\lambda}{|\lambda|}] \left(\frac{\bar{w}}{|\bar{w}|}, v - \bar{w} \right) \\ &= [(1 + |\bar{w}|)^{1/2} - 1 - ((1 + |w|)^{1/2} - 1) \frac{\lambda}{|\lambda|}] \frac{(v - \bar{w}, \bar{w} - w)}{(1 - \lambda) |\bar{w}|} \geq 0 \end{aligned} \right.$$

En effet,

si $\lambda > 1$, $\frac{(v - \bar{w}, \bar{w} - w)}{(1 - \lambda) |\bar{w}|} \leq 0$ et $[(1 + |\bar{w}|)^{1/2} - (1 + \lambda |\bar{w}|)^{1/2}] \leq 0$

si $\lambda < -1$, $[(1 + |\bar{w}|)^{1/2} + (1 + |\lambda| |\bar{w}|)^{1/2} - 2] \geq 0$ et $\frac{(v - \bar{w}, \bar{w} - w)}{(1 - \lambda) |\bar{w}|} \geq 0$

Alors de (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (0.5) et de l'inégalité

$$|v - \bar{w}|^2 + |\bar{w} - w|^2 \geq \frac{1}{2} |v - w|^2$$

on déduit,

$$(\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w), v - w) \geq \frac{1}{2} \frac{|v - w|^2}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2} + 2}$$

LEMME 0.3 On a, $\forall v, w \in \mathbb{R}^d$

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| \leq 6 \frac{|v - w|}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2} + 2}$$

Démonstration

Soient $v, w \in \mathbb{R}^d$. On distinguera trois cas.

(i) v et w sont colinéaires; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $w = \lambda v$.

Si $\lambda = 0$ le résultat est immédiat

Si $\lambda > 0$, on a

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| = \frac{||v| - |w||}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2}} \leq \frac{|v - w|}{(1 + |v|)^{1/2} + (1 + |w|)^{1/2}} \leq$$

$$\leq \frac{2|v-w|}{(1+|v|)^{1/2}+(1+|w|)^{1/2}+2}$$

Si $\lambda < 0$, on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| &= (1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} - 2 \leq 2 \frac{|v| + |w|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \\ &= 2 \frac{|v-w|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \end{aligned}$$

(ii) v et w ont même norme; alors.

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| = 2 \frac{|v-w|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2}$$

(iii) v et w n'ont pas même norme; supposons $|v| < |w|$. Soit \bar{w} la projection de v sur la sphère centrée à l'origine et de rayon $|w|$ (ce n'est pas le même \bar{w} que dans les démonstrations précédentes !).

v et \bar{w} étant colinéaires, on a, d'après (i)

$$|\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w})| \leq \frac{2|v - \bar{w}|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|\bar{w}|)^{1/2} + 2}$$

\bar{w} et w ayant même norme, on a, d'après (ii)

$$|\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(\bar{w})| = \frac{|w - \bar{w}|}{(1+|w|)^{1/2} + 1} \leq 2 \frac{|w - \bar{w}|}{(1+|w|)^{1/2} + (1+|v|)^{1/2} + 2}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(w)| &\leq |\mathcal{F}(v) - \mathcal{F}(\bar{w})| + |\mathcal{F}(\bar{w}) - \mathcal{F}(w)| \leq \\ &\leq \frac{2(|v - \bar{w}| + |\bar{w} - w|)}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \leq \frac{6|v-w|}{(1+|v|)^{1/2} + (1+|w|)^{1/2} + 2} \end{aligned}$$

REFERENCES

- [1] M. MUSKAT, "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media", McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1937.
- [2] D.L. KATZ, D. CORNELL, R. KOBAYASHI, F.H. POETTMANN, J.A. VARY, J.R. ELENBAAS, C.F. WEINAUG, "Handbook of Natural Gas Engineering", McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959
- [3] J. GEERTSMA, "Estimating the Coefficient of Inertial Resistance in Fluid Flow Through Porous Media", Soc. Pet. Eng. J., October 1974, 445-450.
- [4] ENERGY RESSOURCES CONSERVATION BOARD, "Theory and Practice of the Testing of Gas Wells", Third Edition, Alberta, 1975.
- [5] C.S. MATTHEWS, D.G. RUSSELL "Pressure Buildup and Flow Tests in Wells, Monograph Series", Soc. Pet. Eng. of AIME, Dallas, 1, 1967.
- [6] D.L.KATZ, A. FIROOZABADI, "An Analysis of High-Velocity Gas Flow Through Porous Media", J. Pet. Tech, February 1979, 211-216.
- [7] A. HOUBEURT, "Sur l'Ecoulement des Gaz dans les Milieux Poreux", Rev. Inst. Français du pétrole, 1959, XIV, N°11, 1468-1497.
- [8] P. CHAUMET, "Ecoulement Monophasique des Fluides dans les Milieux Poreux", Cours de Production, Tome 3, Publications de l'Inst. Français du Pétrole, 1965.
- [9] G. W. SWIFT, O.G. KIEL, "The Prediction of Gas-well Performance Including the Effect of Non-Darcy Flow", J. Pet. Tech., July 1962, 791-798.
- [10] R.A.WATTENBARGER, H.J. RAMEY JR., "Gas Well Testing with Turbulence, Damage and Wellbore Storage," Soc. Pet. Eng., 1968, 99-109.
- [11] K.S. KADI, "Non-Darcy Flow in Dissolved Gas-Drive Reservoirs", SPE 9301, 1980

- [12] **S.A. HOLDITCH, P.A. MORSE**, "The Effects of Non-Darcy Flow on the Behavior of Hydraulically Fractured Gas Wells", *J. Pet. Tech.*, October 1976, 1169-1178.
- [13] **K.H. GUPPY, H. CINCO-LEY, H.J. RAMEY JR., F. SAMANIEGO-V.**, "Non Darcy-Flow in Wells with Finite-Conductivity Vertical Fratures", *Soc. Pet. Eng. J.*, October 1982, 681-698.
- [14] **P. FORCHEIMER**, "Wasserbewegung durch Boden", *Zeits V. Deutsh Ing.*, Vol. 45, 1901.
- [15] **A.E. SCHEIDEGGER**, "The Physics of Flow Trough Porous Media", Third Edition, University of Toronto Press, 1974.
- [16] **K. AZIZ, A. SETTARI**, "Petroleum Reservoir Simulation", Applied Science Publishers LTD, London, 1979.
- [17] **B.M. STANDING, D.L. KATZ**, "Density of Crude Oils Saturated with Natural Gas", *Trans. AIME*, 1942.
- [18] **D.G. ARONSON**, "Regularity Properties of Flows Trough Porous Media", *SIAM J. Appli. Math.*, 17, 1969, 461-467
- [19] **L.A. CAFARELLI, A. FRIEDMAN**, "Continuity of the Density of a Gas in a Porous Medium", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 252, 1979, 99-113.
- [20] **H. BREZIS, G. CRANDALL**, "Uniqueness of Solution of the Initial-Value Problem for $u_t - \Delta \phi(u) = 0$ ", *J. Math. Pures et Appli.*, 58, 1979, 153-163.
- [21] **O. GRANGE, F. MIGNOT**, " Sur la Résolution d'une Equation et d'une Inéquation Parabolique Non Linéaires", *J. Func. Anal.*, Vol. 11, 1, 1972, 77-92.
- [22] **J.L. LIONS** "Quelques Méthodes de Résolution de Problèmes aux limites Non Linéaires", Dunod, Paris, 1969.
- [23] **R. TEMAM**, "Problèmes Mathématiques en Plasticité", Gauthier-Villars, Paris, 1983
- [24] **A. BAMBERGER**, "Etude d'une Equation Doublement Non Linéaire", *J. Func. Anal.*, 24, 2, 1977, 148-155.
- [25] **P.G. CIARLET**, "The Finite Element Method for Elliptic Problems", North-Holland, Amsterdam, 1978.

[26] R. GLOWINSKI, "Numerical Methods for Non Linear Variational Problems"
Springer-Verlag, New York, 1984.

[27] R.T. ROCKAFELLAR, "Convex Analysis",
Princeton University Press, 1970

[28] J. CEA, R. GLOWINSKI, "Sur des Méthodes d'Optimisation par Relaxation",
Revue Française d'Automatique Informatique Recherche Opérationnelle, Analyse Numérique, R-3, 1973, 5-32.

Imprimé en France

par

l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

