Solutions fortes des équations des fluides magnétiques

Youcef Amirat
Laboratoire de Mathématiques
Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS

Kamel Hamdache
École Polytechnique et CNRS

2ème congrès SM2A, Rabat, 2010

• Les fluides magnétiques (appelés aussi ferrofluides) sont des solutions colloïdales constituées de nanoparticules ferromagnétiques en suspension dans un liquide porteur. Ce sont des fluides artificiels qui ont fait leur apparition vers 1965 (Papell, Rosensweig).

• La possibilité de manipuler le comportement des ferrofluides par des champs magnétiques externes a conduit à de nombreuses applications technologiques ; des applications médicales sont envisagées.

• La modélisation des ferrofluides a débuté dans les années 80 (Rosensweig, Neuringer, Shliomis). De nombreuses études ont montré que le comportement magnétique des particules se transmet à l'ensemble du liquide ; celui-ci acquiert ainsi un comportement magnétique global et peut se déplacer et se déformer sous l'action d'un champ magnétique tout en restant monophasique.

D domaine fluide (ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$) et $(0, T)$ intervalle de temps

Les équations des fluides magnétiques dans $D_T \equiv (0, T) \times D$:

$$\rho(\partial_t U + (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{U}) - (\eta + \zeta)\Delta \mathrm{U} + \nabla p = \mu_0(\mathrm{M} \cdot \nabla)\mathrm{H} + 2\zeta \operatorname{curl} \Omega, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathrm{U} = 0, \quad (2)$$

$$\rho\kappa(\partial_t \Omega + (\mathrm{U} \cdot \nabla)\Omega) - \eta' \Delta\Omega - (\eta' + \lambda')\nabla(\operatorname{div} \Omega)$$
$$= \mu_0 \mathrm{M} \wedge \mathrm{H} + 2\zeta(\operatorname{curl} \mathrm{U} - 2\Omega), \quad (3)$$

$$\partial_t \mathrm{M} + (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{M} = \Omega \wedge \mathrm{M} - \frac{1}{\tau}(\mathrm{M} - \chi_0 \mathrm{H}), \quad (4)$$

$$\operatorname{curl} \mathrm{H} = 0, \;\; \operatorname{div}(\mathrm{H} + \mathrm{M}) = F. \quad (5)$$

(1)+(2) : équations de Navier-Stokes incompressible

(3) : équation du moment angulaire

(4) : équation de la magnétisation

(5) : équations de la magnétostatique

Les inconnues : U (vitesse du fluide), Ω (vitesse angulaire), p (pression), M (magnétisation), H (champ magnétique)

Les données : ρ, κ, η, ζ, η', λ', τ, χ_0 and μ_0 sont des constantes physiques positives

La fonction F est donnée dans D_T, elle représente l'effet du champ magnétique extérieur

Le système (1)–(5) est muni des conditions initiales et aux limites suivantes (n normale unité extérieure)

$$\mathrm{U} = 0, \;\; \Omega = 0, \;\; (\mathrm{H} + \mathrm{M}) \cdot n = 0 \;\; \text{on } (0, T) \times \partial D, \tag{6}$$

$$\mathrm{U}|_{t=0} = \mathrm{U}_0, \;\; \Omega|_{t=0} = \Omega_0, \;\; \mathrm{M}|_{t=0} = \mathrm{M}_0 \;\; \text{in } D. \tag{7}$$

On notera $\mathcal{P}$ le problème (1)–(7).

Objectif de l'étude : existence de solutions régulières du problème $\mathcal{P}$

Notons que (1) peut etre ecrite sous la forme :

$$\rho(\partial_t U + (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{U}) - \eta\Delta\mathrm{U} + \nabla p = \mu_0(\mathrm{M} \cdot \nabla)\mathrm{H} - \zeta \operatorname{curl}(\operatorname{curl}\mathrm{U} - 2\Omega)$$

sachant que $-\Delta\mathrm{U} = \operatorname{curl}^2\mathrm{U}$. Le terme $\mu_0(\mathrm{M} \cdot \nabla)\mathrm{H}$ représente une force (force magnétique de Kelvin) ; c'est un terme singulier.
Notons aussi que dans (6) la condition aux limites porte sur l'induction magnétique $\mathrm{B} = \mathrm{H} + \mathrm{M}$.

Notations et hypothèses

Introduisons les espaces classiques de fonctions à divergence nulle :

$$\mathcal{C}^\infty_{0,s}(D) = \left\{ v \in \mathcal{C}^\infty_0(D, \mathbb{R}^3) : \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } D \right\},$$
$$\mathcal{U} = \text{ fermeture de } \mathcal{C}^\infty_{0,s}(D) \text{ dans } \mathbb{H}^1(D),$$
$$\mathcal{U}_0 = \text{ fermeture de } \mathcal{C}^\infty_{0,s}(D) \text{ dans } \mathbb{L}^2(D).$$

Rappelons que

$$\mathcal{U} = \left\{ v \in \mathbb{H}^1_0(D) : \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } D \right\},$$
$$\mathcal{U}_0 = \left\{ v \in \mathbb{L}^2(D) : \operatorname{div} v = 0 \text{ dans } D,\ v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial D \right\},$$
$$\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}' = \text{ espace dual de } \mathcal{U} \text{ où } \mathcal{U}_0 \text{ est identifié avec son dual.}$$

On suppose que

$$U_0 \in \mathbb{H}^2(D) \cap \mathcal{U}, \ \ \Omega_0 \in \mathbb{H}^2(D) \cap \mathbb{H}^1_0(D),$$

et

$$M_0 \in \mathbb{W}^{1,q}(D), \ \ F \in W^{1,\infty}(0, T; L^q(D)),\ q > 3,\ \int_D F\,dx = 0 \text{ dans } (0, T).$$

Définition. Soit $q > 3$ et $r = \min\{q, 6\}$. On dit que $(\mathrm{U}, \Omega, \mathrm{M}, \mathrm{H})$ est une solution forte dans D_T du problème $(\mathcal{P})$ si :
(i)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{U} \in L^\infty(0, T; \mathrm{H}^2(D) \cap \mathcal{U}) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{W}^{2,r}(D)),\\
&\Omega \in L^\infty(0, T; \mathrm{H}^2(D) \cap \mathrm{H}_0^1(D)) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathrm{H}^3(D)),\\
&\mathrm{M},\, \mathrm{H} \in L^\infty(0, T;\, \mathbb{W}^{1,q}(D)) \cap W^{1,\infty}(0, T;\, \mathbb{L}^q(D));
\end{aligned}$$

(ii) la fonction H est telle que $\mathrm{H} = \nabla\varphi$ avec $\varphi \in L^\infty(0, T; W^{2,q}(D))$ et vérifie

$$\begin{aligned}
&-\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathrm{M} - F \ \text{ dans } D_T,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -M \cdot n \ \text{ sur } (0, T) \times \partial D, \ \int_D \varphi \, dx = 0 \text{ dans } (0, T);
\end{aligned}$$

(iii) on a, pour tout $v \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}
&\rho \frac{d}{dt} \int_D \mathrm{U} \cdot v \, dx + \rho \int_D (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{U} \cdot v \, dx + (\eta + \zeta) \int_D \nabla \mathrm{U} \cdot \nabla v \, dx\\
&= \mu_0 \int_D (\mathrm{M} \cdot \nabla)\mathrm{H} \cdot v \, dx + 2\zeta \int_D (\operatorname{curl} \Omega) \cdot v \, dx \quad \text{in } \mathcal{D}'(]0, T[),\\
&\mathrm{U}|_{t=0} = U_0;
\end{aligned}$$

(iv) les équations de la vitesse angulaire Ω et de la magnétisation M sont vérifiées p.p. dans D_T et les conditions initiales sur Ω et M sont vérifiées au sens des traces.

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, Il existe un temps* $T^* > 0$ *tel que le problème* $(\mathcal{P})$ *admet une unique solution forte* $(\mathrm{U}, \Omega, \mathrm{M}, \mathrm{H})$ *dans* D_{T^*}*, au sense de la définition précédente. De plus, il existe* $p \in L^2(0, T^*; W^{1,r}(D))$*,* $r = \min\{q, 6\}$*, tel que tel que l'équation de la quantité de mouvement est vérifiée* p.p. dans D_{T^*}.

La démonstration de ce théorème comporte deux étapes.

Première étape. **On étudie un problème linéarisé du problème ($\mathcal{P}$).**

Soit $(\mathrm{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$, avec $\mathrm{U}_\sharp$ dans $L^\infty(0, T; \mathrm{H}^2(D) \cap \mathcal{U}) \cap L^2(0, T; \mathbb{W}^{2,r}(D))$, $\Omega_\sharp$ dans $L^\infty(0, T; \mathrm{H}^2(D) \cap \mathrm{H}^1_0(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{W}^{2,r}(D))$ et $\partial_t \mathrm{U}_\sharp$ dans $L^2(0, T; \mathbb{L}^2(D))$.

On associe à $(\mathrm{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$ le couple (M, H) défini comme la solution du système linéaire

$$\partial_t \mathrm{M} + (\mathrm{U}_\sharp \cdot \nabla)\mathrm{M} - \Omega_\sharp \wedge \mathrm{M} + \frac{1}{\tau}\mathrm{M} = \frac{\chi_0}{\tau}\mathrm{H} \quad \text{in } D_T,$$
$$\operatorname{curl} \mathrm{H} = 0, \ \operatorname{div}(\mathrm{H} + \mathrm{M}) = F \quad \text{in } D_T,$$

muni des conditions aux limites et initiales

$$(\mathrm{H} + \mathrm{M}) \cdot n = 0 \quad \text{on } (0, T) \times \partial D,$$
$$\mathrm{M}|_{t=0} = \mathrm{M}_0 \quad \text{in } D.$$

On définit ensuite le couple (U, Ω) comme la solution du système linéaire

$$\begin{aligned}
&\rho(\partial_t \mathsf{U} + (\mathsf{U}_\sharp \cdot \nabla)\mathsf{U}) - (\eta+\zeta)\Delta \mathsf{U} + \nabla p = \mu_0(\mathsf{M}\cdot\nabla)\mathsf{H} + 2\zeta \operatorname{curl}\Omega,\\
&\operatorname{div} \mathsf{U} = 0,\\
&\rho\kappa(\partial_t \Omega + (\mathsf{U}_\sharp \cdot \nabla)\Omega) - \eta'\Delta\Omega - (\eta'+\lambda')\nabla(\operatorname{div}\Omega)\\
&= \mu_0 \mathsf{M}\wedge\mathsf{H} + 2\zeta(\operatorname{curl}\mathsf{U} - 2\Omega),
\end{aligned}$$

muni des conditions aux limites et initiales

$$\begin{aligned}
&\mathsf{U} = 0,\ \ \Omega = 0 \ \text{ on } (0,T)\times\partial D,\\
&\mathsf{U}|_{t=0} = \mathsf{U}_0,\ \Omega|_{t=0} = \Omega_0 \ \text{ in } D.
\end{aligned}$$

Seconde étape. **On construit une suite de solutions approchées de $(\mathcal{P})$**

On pose $(\mathsf{U}^0, \Omega^0) = (0,0)$, puis (U^n, Ω^n) étant connu, on définit $(\mathsf{U}^{n+1}, \Omega^{n+1}, \mathsf{M}^{n+1}, \mathsf{H}^{n+1})$ comme l'unique solution forte du problème linéaire précédant où on remplace $(\mathsf{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$ par (U^n, Ω^n).

Première étape.

Étude du problème en (M, H)

On découple le système par une méthode itérative. Pour sa mise en oeuvre on établit les propriétés suivantes.

Lemme. Supposons que M est une fonction donnée. Alors :

(i) Si $M \in L^\infty(0, T;\, \mathbb{L}^q(D))$ alors il existe une unique fonction $\varphi \in L^\infty(0, T;\, W^{1,q}(D))$ tel que $\int_D \varphi\, dx = 0$ et $H = \nabla\varphi$ vérifie

$$\int_D H \cdot \nabla v\, dx = -\int_D M \cdot \nabla v\, dx - \int_D Fv\, dx,\ \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D}).$$

De plus on a l'estimation

$$\|H\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))} \leq C\left(\|M\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))} + \|F\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))}\right).$$

(ii) Si $M \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}^{1,q}(D))$ alors $H \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}^{1,q}(D))$ et on a l'estimation

$$\|\nabla H\|_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)} \leq C\left(\|\nabla M\|_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)} + \|F\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))}\right).$$

On considère, pour tout $t \in (0, T)$, le problème

$$\begin{aligned} &\Delta\psi = F \text{ dans } D, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial D, \int_D \psi \, dx = 0. \end{aligned}$$

Ce problème admet une solution unique $\psi \in W^{2,q}(D)$ vérifiant l'estimation

$$\|\psi\|_{W^{2,q}(D)} \leq C\|F\|_{L^q(D)},$$

voir, par exemple Grisvard. Notant $\Psi = \nabla\psi$ et $N = M - \Psi$, on est amené à chercher une fonction φ vérifiant

$$\int_D \nabla\varphi \cdot \nabla v \, dx = -\int_D N \cdot \nabla v \, dx, \ \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{D}).$$

Comme $\operatorname{curl}(H + M) = \operatorname{curl} M, \ \operatorname{div}(H + M) = F$ in D et $(H + M) \cdot n = 0$ sur ∂D, en utilisant un résultat de von Wahl on a p.p. dans $(0, T)$,

$$\|\nabla(H+M)\|_{(\mathbb{L}^q(D))^3} \leq C \left(\|\operatorname{curl} M\|_{\mathbb{L}^q(D)} + \|F\|_{L^q(D)}\right) \leq C \left(\|\nabla M\|_{(\mathbb{L}^q(D))^3} + \|F\|_{L^q(D)}\right)$$

On a ainsi résolu l'équation de la magnétostatique, pour M donné.

On étudie ensuite l'équation de la magnétisation.

Lemme. Supposons que H est une fonction donnée. Alors :

(i) Si $H \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^q(D))$ alors il existe une unique fonction $M \in L^\infty(0, T; \mathbb{L}^q(D))$ vérifiant

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_D \left(M \cdot w_t + (U_\sharp \cdot \nabla) w \cdot M + (\Omega_\sharp \wedge M - \frac{1}{\tau} M) \cdot w \right) dxdt \\ = \quad & -\frac{\chi_0}{\tau} \int_0^T \int_D H \cdot w \, dxdt - \int_D M_0(x) \cdot w(0,x) \, dx, \end{aligned}$$

pour tout $w \in C^1(\overline{D_T}, \mathbb{R}^3)$ à support compact dans $[0, T[\times \overline{D}$.
(ii) Si $H \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}^{1,q}(D))$ alors $M \in L^\infty(0, T; \mathbb{W}^{1,q}(D))$ et vérifie

$$\begin{aligned} &\partial_t M + (U_\sharp \cdot \nabla) M - \Omega_\sharp \wedge M + \frac{1}{\tau} M = \frac{\chi_0}{\tau} H \ \text{ in } D_T, \\ &M(0) = M_0 \ \text{ in } D. \end{aligned}$$

L'équation de la magnétisation est un système de transport linéaire, sans condition aux limites car la vitesse $U_\sharp$ est nulle sur le bord du domaine D.

De plus, les coefficients de l'équation de M sont réguliers. Puisque $r > 3$, grâce à l'injection de Sobolev $W^{1,r}(D) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{D})$ ($\alpha = 1 - \frac{3}{r}$) où $\hookrightarrow$ signifie injection continue, les fonctions $\nabla \mathrm{U}_\sharp$ et $\nabla \Omega_\sharp$ sont dans $L^2\left(0, T; C^{0,\alpha}(\overline{D}, \mathbb{R}^9)\right)$. Notons aussi que $H^2(D) \hookrightarrow H^1(D)$ avec injection compacte, en utilisant un résultat classique de compacité on obtient que $\mathrm{U}_\sharp$ appartient à $C([0,T]; \mathbb{H}^1(D))$.

Le lemme précédent s'obtient alors simplement en utilisant la méthode des caractéristiques.

En combinant les résultats des deux lemmes précédents on peut établir le résultat suivant.

Lemme. Le problème en (M, H) admet une unique solution globale (M, H) où M and H appartiennent à $L^\infty(0, T;\, \mathbb{W}^{1,q}(D)) \cap W^{1,\infty}(0, T;\, \mathbb{L}^q(D))$.

En effet, il suffit d'utiliser une méthode itérative. On pose $M^0 = 0$, puis M^k étant connu, on définit M^{k+1} comme la solution du problème

$$\partial_t M^{k+1} + (U_\sharp \cdot \nabla) M^{k+1} + \frac{1}{\tau} M^{k+1} = \Omega_\sharp \wedge M^k + \frac{\chi_0}{\tau}\left(\mathcal{L}(M^k) + \nabla\psi\right) \text{ in } D_T,$$

$$M^{k+1}(0) = M_0 \text{ in } D,$$

avec $\mathcal{L}(M) = \nabla\widetilde{\varphi}$, où $\widetilde{\varphi}$ est l'unique solution du problème aux limites, pour tout $t \in (0, T)$,

$$\Delta\widetilde{\varphi} = -\mathrm{div}\, M \ \text{ in } D,$$
$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial n} = -M \cdot n \ \text{ on } \partial D, \ \int_D \widetilde{\varphi}\, dx = 0,$$

et ψ est la solution du problème

$$\Delta\psi = F \ \text{ dans } D,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial D, \ \int_D \psi\, dx = 0.$$

En utilisant des résultats de régularité on montre que

$$\|\mathcal{L}(M)\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))} \leq C\|M\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))},$$
$$\|\nabla\mathcal{L}(M)\|_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)} \leq C\|\nabla M\|_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)}.$$

ainsi que

$$\|\nabla\psi\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{W}^{1,q}(D))} \leq C\|F\|_{L^\infty(0,T;L^q(D))}.$$

On a aussi un résultat important concernant les estimations de (M, H) en fonction de $(\mathrm{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$.

Lemme. On a :

(i)

$$\|M\|^q_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^q(D))} + C\|H\|^q_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^q(D))} \leq b_1$$

où

$$b_1 = \left(\|M_0\|^q_{\mathbb{L}^q(D)} + CT\right)(1 + \exp(CT))\,;$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\|\nabla M\|^q{}_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)} + C\|\nabla H\|^q{}_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^q(D))^3)} \leq b_2, \\
&\|M_t\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))} \leq b_3, \quad \|H_t\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^q(D))} \leq b_4,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
b_2 &= \left(\|\nabla M_0\|^q_{(\mathbb{L}^q(D))^3} + CT\right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \exp\left(C\int_0^T \left(1 + \|\nabla U_\sharp(s)\|_{(\mathbb{L}^\infty(D))^3} + \|\nabla \Omega_\sharp(s)\|_{(\mathbb{L}^\infty(D))^3}\right) ds\right)\right), \\
b_3 &= C\left(1 + b_2^{1/q}\|U_\sharp\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(D))} + \|\Omega_\sharp\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(D))}\right), \quad b_4 = C(1 + b_3);
\end{aligned}$$

(Suite du lemme).

(iii)

$$\|(M\cdot\nabla)H\|^q_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^q(D))} \leq Cb_2(1+b_2), \quad \|M\wedge H\|^q_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^q(D))} \leq C(1+b_2);$$

(iv)

$$\|[(M\cdot\nabla)H]_t\|_{L^2(0,T;\,\mathbb{H}^{-1}(D))} \leq b_5, \quad \|[M\wedge H]_t\|^q_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^q(D))} \leq C(1+b_2)(b_3^q+b_4^q),$$

avec

$$b_5 = C\sqrt{T}\,(1+b_2)^{1/q}\,b_4.$$

Remarque.

– Seule l'estimation (i) est uniforme (indépendante de de $(\mathrm{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$.

– Les estimations du lemme précédant ainsi que celles qui suivent sont très techniques.

Étude du problème en (U, Ω)

On établit les propriétés suivantes.

Lemme. Le problème en (U, Ω) admet une unique solution solution faible globale possédant les propriétés suivantes :
(i)

$$U \in H^1(0, T; \mathcal{U}) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{W}^{2,r}(D)),$$
$$\Omega \in H^1(0, T; \mathbb{H}^1_0(D)) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathbb{L}^2(D)) \cap L^2(0, T; \mathbb{H}^3(D));$$

(ii)

$$\left\| \frac{\rho}{2}\, U \right\|^2_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^2(D))} + \left\| \frac{\rho\kappa}{2}\, \Omega \right\|^2_{L^\infty(0,T;\,\mathbb{L}^2(D))} \leq d_1,$$
$$\|\nabla U\|^2_{L^2(0,T;\,(\mathbb{L}^2(D))^3)} + \|\nabla \Omega\|^2_{L^2(0,T;\,(\mathbb{L}^2(D))^3)} \leq C d_1,$$

avec

$$d_1 = \left\| \frac{\rho}{2}\, U_0 \right\|^2 + \left\| \frac{\rho\kappa}{2}\, \Omega_0 \right\|^2 + C\left(\|(M \cdot \nabla) H\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{L}^2(D))} + \|M \wedge H\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{L}^2(D))} \right);$$

(Suite du lemme)

(iii)

$$\begin{aligned} &\|\nabla U\|^2_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^2(D))^3)} + \|\nabla \Omega\|^2_{L^\infty(0,T;(\mathbb{L}^2(D))^3)} \\ &+\|U_t\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{L}^2(D)} + \|\Omega_t\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{L}^2(D)} \leq Cd_2, \\ &\|U\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{H}^2(D))} + \|\Omega\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{H}^2(D))} \leq Cd_2, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d_2 \quad = \quad & \left(\|\nabla U_0\|^2 + \|\nabla \Omega_0\|^2 + (\|M\cdot\nabla)H\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \|M\wedge H\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}\right) \times \\ & \times \left(1 + \exp\left(C\|U_\sharp\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^\infty(D))}\right)\right); \end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned} &\|U_t\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(D))} + \|\Omega_t\|^2_{L^\infty(0,T;\mathbb{L}^2(D))} \\ &+\|\nabla U_t\|^2_{L^2(0,T;(\mathbb{L}^2(D))^3)} + \|\nabla \Omega_t\|^2_{L^2(0,T;(\mathbb{L}^2(D))^3)} \leq C(d_3^1 + d_3^2) \end{aligned}$$

avec

$$d_3^1 = (\|U_0\|^2_{\mathbb{H}^2(D)} + \|\Omega_0\|^2_{\mathbb{H}^2(D)})(1 + \|U_\sharp(0)\|^2_{\mathbb{H}^1(D)}) + \|(M_0\cdot\nabla)H_0\|^2 + \|M_0\wedge H_0\|^2$$

(Suite du lemme)

et

$$d_3^2 = \|[(M\cdot\nabla)H]_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H}^{-1}(D))} + \|[M\wedge H]_t\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{H}^{-1}(D))} + d_2\|U_{\sharp t}\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(D))}.$$

Ici $H_0 = \nabla\varphi_0$ and φ_0 est l'unique solution faible dans $H^1(D)$ de

$$-\Delta\varphi_0 = \mathrm{div}\, M_0 - F_0 \ \text{ dans } D,$$
$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = -M_0\cdot n \ \text{ sur } \ \partial D, \quad \int_D \varphi_0\, dx = 0,$$

avec $F_0 = F(0)$.

(v)

$$\|U\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{W}^{2,r}(D))} \le Cd_4, \quad \|\Omega\|^2_{L^2(0,T;\,\mathbb{H}^3(D))} \le Cd_5,$$

où d_4 and d_5 sont définis par

$$d_4 = d_3^1 + d_3^2 + d_2\left(1 + \|U_\sharp\|^2_{\mathbb{L}^\infty(D_T)}\right) + T\,[b_2(1+b_2)]^{2/q},$$
$$d_5 = d_3^1 + d_3^2 + d_2\left(1 + \|U_\sharp\|^2_{\mathbb{L}^\infty(D_T)} + \|U_\sharp\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{W}^{2,r}(D))}\right) + T\,[b_2(1+b_2)]^{2/q}.$$

Seconde étape. On construit une suite de solutions approchées du problème $(\mathcal{P})$ comme suit.

On pose $(\mathrm{U}^0, \Omega^0) = (0,0)$, puis (U^n, Ω^n) étant connu, on définit $(\mathrm{U}^{n+1}, \Omega^{n+1}, \mathrm{M}^{n+1}, \mathrm{H}^{n+1})$ comme l'unique solution forte du problème linéaire précédent où on remplace $(\mathrm{U}_\sharp, \Omega_\sharp)$ par (U^n, Ω^n).

On considére la fonction Φ_N définie dans $(0, T)$ par

$$\Phi_N(t) = \max_{0\leq n\leq N} \left(\sup_{0\leq s\leq t} \left(1 + \|\nabla \mathrm{U}^{n+1}(s)\| + \|\nabla \Omega^{n+1}(s)\| + \|\mathrm{M}^{n+1}(s)\|_{\mathbb{W}^{1,q}(D)} \right) \right)$$

où N est un entier suffisamment grand. On note par C les diverses constantes ne dépendant que des données physiques.
L'inégalité précédénte permet de montrer qu'il existe une constante positive K, ne dépendant que de r, tel que Φ_N vérifies

$$\Phi_N(t) \leq C \exp\left(C \exp\left(C \int_0^t \Phi_N^K(s)\, ds \right) \right).$$

On en déduit qu'il existe $T^* > 0$ tel que $\Phi_N(t) \leq C$, pour tout $t \in (0, T^*)$.

On montre ensuite que

$$\int_0^{T^*} \left(\|U_t^{n+1}(s)\|^2_{\mathbb{H}^1(D)} + \|\Omega_t^{n+1}(s)\|^2_{\mathbb{H}^1(D)} \right) ds$$
$$+ \int_0^{T^*} \left(\|U^{n+1}(s)\|^2_{\mathbb{W}^{2,r}(D)} + \|\Omega^{n+1}(s)\|^2_{\mathbb{W}^{2,r}(D)} \right) ds$$
$$+ \sup_{0 \le t \le T^*} \left(\|U^{n+1}(t)\|_{\mathbb{H}^2(D)} + \|\Omega^{n+1}(t)\|_{\mathbb{H}^2(D)} + \|M^{n+1}(t)\|_{\mathbb{W}^{1,q}(D)} \right) \le C,$$

pour tout $n \geq 0$.

Grace à cette estimation uniforme on montre que la suite $(U^n, \Omega^n, M^n, H^n)$ converge vers une limite (U, Ω, M, H) qui est une solution forte du problème $(\mathcal{P})$.

Remarque. L'unicité des solutions fortes a été établie P. Kaloni et S. Venkatasubramanian.

Modèle avec diffusion des spins

Une des principales obstructions à la construction de solutions régulières du problème est due au fait que l'équation de la magnétisation est un système hyperbolique (dit de Bloch). Dans le modèle avec prise en compte de la diffusion des spins l'équation de la magnétisation est remplacée par

$$\partial_t \mathrm{M} + (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{M} = \Omega \wedge \mathrm{M} - \frac{1}{\tau}(\mathrm{M} - \chi_0 \mathrm{H}) + \sigma \Delta \mathrm{M}$$

(de type Bloch-Torrey, $\sigma > 0$ coefficient de diffusion des spins) et les conditions aux limites du système sont remplacées par

$$\mathrm{U} = 0,\ \ \Omega = 0,\ \ \mathrm{curl}\, \mathrm{M} \times n = 0,\ \ \mathrm{M} \cdot n = 0 \ \text{ on } (0, T) \times \partial D.$$

Dans ce cas on montre l'existence globale de solutions faibles d'énergie finie (travail en collaboration avec K. Hamdache et F. Murat).

Modèles avec température

D'autres modèles font intervenir une équation semi linéaire de la température (ferrofluide chauffé, ...). On a généralement $M = M(\theta, H)$ et

$$\rho c_p \big(\partial_t \theta + \mathrm{U} \cdot \nabla\theta\big) + \mu_0 \theta \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta} \cdot (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{H} - \kappa \Delta\theta = \eta \left(\nabla \mathrm{U} + \nabla \mathrm{U}^T\right) : \nabla \mathrm{U}$$

Le second membre représente la dissipation de l'énergie visqueuse et le terme $\mu_0 \theta \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \theta} \cdot (\mathrm{U} \cdot \nabla)\mathrm{H}$ représente la puissance thermale due à l'effet magnétocalorique.