Fluides miscibles en milieu poreux

Youcef Amirat
Laboratoire de Mathématiques
Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS

Abdelhamid Ziani
Département de Mathématiques
Université de Nantes

Journées EDP Auvergne-Rhône-Alpes, Saint-Étienne, 2006

On désigne par Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ et $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$.

Les équations décrivant l'écoulement de deux fluides miscibles et incompressibles sont (Aziz et Settari ; Bear ; Chavent et Jaffré ; Douglas ; Scheidegger)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = q^+ - q^- \quad \text{dans } \Omega_T, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u} = -\frac{k(x)}{\mu(c)} \nabla p \quad \text{dans } \Omega_T, \tag{2}$$

$$\Phi(x)\, \partial_t c + \boldsymbol{u} \cdot \nabla c + c\, q^+ - \operatorname{div}(d(x, \boldsymbol{u}) \nabla c) = \hat{c}\, q^+ \quad \text{dans } \Omega_T. \tag{3}$$

(1) : conservation de la masse totale
(2) : loi de Darcy
(3) : conservation de la masse de l'un des constituants

$\boldsymbol{u}$ vitesse de Darcy ; p pression ; $k(x)$ perméabilité absolue ; $\Phi(x)$ porosité ; c concentration $(0 \leq c(x, t) \leq 1)$; $\mu(c)$ viscosité.
On a

$$\mu(c) = \mu(0) \left(1 + (M^{1/4} - 1)\, c\right)^{-4}, \quad c \in (0, 1),$$

$M = \mu(0)/\mu(1)$ (rapport de mobilité).

$d(x, \boldsymbol{u})$ tenseur de dispersion hydrodynamique

$$d(x, \boldsymbol{u}) = \Phi(x)\,(d_m\, I + d^\circ(\boldsymbol{u})),$$

$$d^\circ(\boldsymbol{u}) = |\boldsymbol{u}|\,(d_l\, E(\boldsymbol{u}) + d_t\,(I - E(\boldsymbol{u}))),$$

$I =$ matrice identité, $E = (\boldsymbol{u}_i\, \boldsymbol{u}_j / |\boldsymbol{u}|^2)$, d_m coefficient de diffusion moléculaire, $d^\circ(\boldsymbol{u})$ tenseur de dispersion mécanique, d_l, d_t $(d_l \geq d_t)$ coefficients de dispersion longitudinale et transverse.

Les fonctions $\Phi(x)$ et $k(x)$ vérifient

$$0 < \Phi_* \leq \Phi(x) \leq \Phi_*^{-1}, \quad 0 < k_* \leq k(x) \leq k_*^{-1}, \quad x \in \Omega.$$

On a

$$d(x, \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \Phi_*\,(d_m + d_t\,|\boldsymbol{u}|)\,|\boldsymbol{\xi}|^2,$$

$$|d(x, \boldsymbol{u})\,\boldsymbol{\xi}| \leq \Phi_*^{-1}\,(d_m + d_l\,|\boldsymbol{u}|)\,|\boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,\ x \in \Omega.$$

Pour des vitesses relativement élevées, les effets de la dispersion mécanique

sont plus importants que ceux de la diffusion moléculaire. En pratique la diffusion moléculaire est négligée.

Le système est donc formé d'une équation elliptique (**équation de la pression**) couplée avec une équation de diffusion-convection (**équation de la concentration**) qui pour $d_m = 0$ est dégénérée.

Le système posé dans Ω_T est muni des conditions initiales et aux limites

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}\cdot\nu = 0, \quad d(x,\boldsymbol{u})\,\nabla c\cdot\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_T,\\ &c(x,0) = c_0(x), \quad x\in\Omega, \end{aligned}$$

où $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, Γ bord de Ω, ν normale unité extérieure.

L'objet de ce travail est l'analyse des équations lorsque $d_m = 0$.

Hypothèses

- Ω est un domaine simplement connexe de frontière Γ de classe $C^{1,1}$.
- $c_0 \in L^\infty(\Omega)$, $0 \le c_0(x) \le 1$, $x \in \Omega$.
- $\hat{c} \in L^\infty(\Omega_T)$, $0 \le \hat{c}(x,t) \le 1$, $(x,t) \in \Omega_T$.
- $q^+, q^- \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega))$ et $\int_\Omega (q^+ - q^-)\,dx = 0$.
- La fonction μ est telle que μ et $1/\mu$ sont **strictement convexes**, et $\mu \in C^2([0,1])$, $0 < \mu_- \le \mu(c) \le \mu^+ \quad \forall c \in (0,1)$.

• On suppose pour simplifier que $\Phi(x) \equiv 1$, $k(x) \equiv 1$.

On a (Chen et Ewing ; Fabrie et Langlais ; Feng)

Théorème. *Pour $d_m > 0$, il existe un couple (p, c) de fonctions avec p dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et c dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$, vérifiant*

$$\int_\Omega p(x,t)\, dx = 0, \quad 0 \leq c(x,t) \leq 1,$$

solution du système précédent.

Dans la suite on pose $d_m = \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, on suppose $d_l \geq d_t > 0$ et on considère le système elliptique-parabolique $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ suivant

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \boldsymbol{u}^\varepsilon = q^+ - q^-, \\
&\boldsymbol{u}^\varepsilon = -\frac{1}{\mu(c^\varepsilon)} \nabla p^\varepsilon, \\
&\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad \int_\Omega p^\varepsilon\, dx = 0, \\
&\partial_t c^\varepsilon + \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon + c^\varepsilon q^+ - \operatorname{div}(d(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \nabla c^\varepsilon) = \hat{c}\, q^+, \\
&d(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \nabla c^\varepsilon \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad c^\varepsilon \,|_{t=0} = c_0.
\end{aligned}$$

On étudie le comportement asymptotique, quand ε tend vers 0, des solutions $(p^\varepsilon, c^\varepsilon)$ du problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Le problème limite (noté $(\mathcal{P}_0)$) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{div} \boldsymbol{u} = q^+ - q^-, \quad \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\mu(c)} \nabla p, \quad \int_\Omega p \, dx = 0,\\
&\boldsymbol{u} \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0,\\
&\partial_t c + \boldsymbol{u} \cdot \nabla c + c\, q^+ - \operatorname{div}(d^\circ(\boldsymbol{u}) \nabla c) = \hat{c}\, q^+,\\
&d^\circ(\boldsymbol{u}) \nabla c \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad c\,|_{t=0} = c_0,
\end{aligned}
$$

où $d^\circ(\boldsymbol{u}) = (d_l - d_t) \frac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^\top}{|\boldsymbol{u}|} + d_t \,|\boldsymbol{u}|\, I.$

Définition. *Un couple (p, c) est solution faible du problème (limite) $(\mathcal{P}_0)$ si :*

(i) $p \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ *et p est solution de l'équation de la pression ;*

(ii) $c \in L^\infty(\Omega_T)$, $\quad 0 \le c(x,t) \le 1, \quad |\boldsymbol{u}|^{1/2} \nabla c \in (L^2(\Omega_T))^d$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} \{c\, \partial_t \varphi + c\, \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi - d^\circ(\boldsymbol{u}) \nabla c \cdot \nabla \varphi - c\, q^- \varphi\} \, dx\, dt\\
&\qquad = - \int_{\Omega_T} \hat{c}\, q^+ \varphi \, dx\, dt - \int_\Omega c_0(x)\, \varphi(x, 0)\, dx,
\end{aligned}
$$

pour toute fonction φ dans $C^1(\overline{\Omega}_T)$ à support compact dans $\overline{\Omega} \times [0, T[$.

Théorème. *Il existe des suites extraites de* (p^ε), $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ *et* (c^ε), *et des fonctions* p, $\boldsymbol{u}$, *et* c *tel que, quand* $\varepsilon \to 0$,

$$
\begin{aligned}
&p^\varepsilon \to p \text{ fortement dans } L^2(0,T;H^1(\Omega)),\\
&\boldsymbol{u}^\varepsilon \to \boldsymbol{u} \text{ fortement dans } (L^4(\Omega_T))^d,\\
&c^\varepsilon \rightharpoonup c \text{ dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible-}*,\\
&c^\varepsilon\,\boldsymbol{u}^\varepsilon \to c\,\boldsymbol{u} \text{ fortement dans } (L^2(\Omega_T))^d,
\end{aligned}
$$

et le couple (p,c) *est une solution faible du problème* $(\mathcal{P}_0)$.

La suite est consacrée à la démonstration de ce théorème.

On établit les estimations suivantes, indépendantes de ε.

(i) La suite (p^ε) est bornée dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$;

(ii) $(\sqrt{\varepsilon}\,\nabla c^\varepsilon)$ et $(|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}\,\nabla c^\varepsilon)$ sont bornées dans $(L^2(\Omega_T))^d$, $(\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega))$ et $(d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,\nabla c^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega_T)$;

(iii) la suite (p^ε) est bornée dans $L^2(0,T;W^{2,4/3}(\Omega))$ et $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ est bornée dans $(L^2(0,T;W^{1,4/3}(\Omega)))^d$.

Démonstration

(i) Immédiate.

(ii) On multiplie l'équation de la concentration par c^ε et on intègre sur Ω. On a (en utilisant $0 \leq c^\varepsilon(x,t) \leq 1$)

$$\int_\Omega |(\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon)\, c^\varepsilon|\, dx \leq \delta \int_\Omega |\boldsymbol{u}^\varepsilon|\, |\nabla c^\varepsilon|^2\, dx + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega |\boldsymbol{u}^\varepsilon|\, dx,$$

pour tout $\delta > 0$. On obtient alors, en utilisant la propriété du tenseur $d(u)$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt} \int_\Omega |c^\varepsilon|^2\, dx + (d_t - \delta) \int_\Omega |\boldsymbol{u}^\varepsilon|\, |\nabla c^\varepsilon|^2\, dx \\ &+ \varepsilon \int_\Omega |\nabla c^\varepsilon|^2\, dx \leq \frac{1}{4\delta} \int_\Omega |\boldsymbol{u}^\varepsilon|\, dx + \int_\Omega 2\, |\, q^+|\, dx. \end{aligned}$$

En choisissant δ petit, on obtient que les suites $(|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}\, \nabla c^\varepsilon)$ et $(\sqrt{\varepsilon}\, \nabla c^\varepsilon)$ sont bornées dans $(L^2(\Omega_T))^d$.

Comme

$$|\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon| \leq |\boldsymbol{u}^\varepsilon|\,|\nabla c^\varepsilon| = |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}\,|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}\,|\nabla c^\varepsilon|,$$

par Hölder, $(\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon)$ est bornée $L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega))$, donc $(d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,\nabla c^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon)$ est bornée dans $L^1(\Omega_T)$.

(iii) On a

$$-\Delta p^\varepsilon = -\mu'(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon + \mu(c^\varepsilon)\,(q^+ - q^-),$$

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nu \,|_{\Gamma_T} = 0, \quad \int_\Omega p^\varepsilon(x,t)\,dx = 0,$$

d'où, en utilisant un résultat de Grisvard,

$$(p^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0, T; W^{2,4/3}(\Omega)),$$

$$(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \text{ est bornée dans } (L^2(0, T; W^{1,4/3}(\Omega)))^d.$$

Conséquence

Il existe des fonctions p, $\boldsymbol{u}$, et c et des suites extraites, tel que,

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible-}*$$

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ in } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^d \text{ faible-}*$$

$$c^\varepsilon \rightharpoonup c \text{ dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible-}*.$$

On réécrit l'équation de la concentration sous la forme

$$\partial_t c^\varepsilon + \mathrm{div}(c^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon - d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\, \nabla c^\varepsilon) + c^\varepsilon\, q^- = \hat{c}\, q^+.$$

On a donc, au sens des distributions,

$$\partial_t c + \mathrm{div}(\overline{c\, \boldsymbol{u}}) - \mathrm{div}\, \overline{\boldsymbol{d}} + c\, q^- = \hat{c}\, q^+,$$

où, pour des suites extraites,

$$c^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \rightharpoonup \overline{c\, \boldsymbol{u}} \text{ dans } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^d \text{ weak-}*,$$
$$d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\, \nabla c^\varepsilon \rightharpoonup \overline{\boldsymbol{d}} \text{ faiblement dans } (L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega)))^d.$$

Étude du passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$

On montre d'abord que, pour une suite extraite,

$$c^\varepsilon\, \boldsymbol{u}^\varepsilon \rightharpoonup c\, \boldsymbol{u} \text{ dans } (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)))^d \text{ faible-}*,$$

c'est-à-dire $\overline{c\, \boldsymbol{u}} = c\, \boldsymbol{u}$. Pour cela on utilise le lemme de compacité suivant (Kazhikhov).

Lemme. *Soit V, W, V_1 des espaces de Banach tel que*

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset V \subset W \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad V' \subset V_1' \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec injections continues, l'injection $V \subset W$ étant compacte. Soit (α^ε), (β^ε) des suites tel que (pour $1 < p < \infty$) :

$$\begin{aligned}
&(\alpha^\varepsilon) \textit{ est bornée dans } L^p(0,T;V),\\
&\alpha^\varepsilon \rightharpoonup \alpha \ \textit{ in } L^p(0,T;W) \textit{ faible,}\\
&(\beta^\varepsilon) \textit{ est bornée dans } L^q(0,T;W'),\\
&\beta^\varepsilon \rightharpoonup \beta \ \textit{ dans } L^q(0,T;W') \textit{ faiblement pour } q \geq \frac{p}{p-1},\\
&(\partial_t \beta^\varepsilon) \textit{ est bornée dans } L^{p_1}(0,T;V_1'),\ 1 \leq p_1 \leq \infty.
\end{aligned}$$

Alors, on peut extraire des sous suites tel que

$$\alpha^\varepsilon \, \beta^\varepsilon \rightharpoonup \alpha \, \beta \ \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_T).$$

On utilise le lemme de Kazhikhov avec

$$V = W^{1,4/3}(\Omega), \quad W = L^{4/3}(\Omega), \quad V_1 = W^{1,4}(\Omega),$$
$$\alpha^\varepsilon = \boldsymbol{u}^\varepsilon, \quad \beta^\varepsilon = c^\varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \text{ est bornée dans } (L^2(0,T;V))^d,\\
&\boldsymbol{u}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{u} \text{ dans } (L^2(0,T;W))^d \text{ faible},\\
&(\partial_t c^\varepsilon) \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V'),\\
&c^\varepsilon \rightharpoonup c \text{ dans } L^2(0,T;W') \text{ faible.}
\end{aligned}$$

D'où $\overline{c\,\boldsymbol{u}} = c\,\boldsymbol{u}$.

On montre ensuite que la fonction limite $\boldsymbol{u}$ vérifie

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\mu(c)}\nabla p.$$

Démonstration de la relation précédente

Il existe $\overline{\mu}$ et μ_{-1} dans $L^\infty(\Omega_T)$ tel que, pour des suites extraites,

$$\mu(c^\varepsilon) \rightharpoonup \overline{\mu} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu(c^\varepsilon)} \rightharpoonup \frac{1}{\mu_{-1}} \quad \text{dans } L^\infty(\Omega_T) \text{ faible-}*.$$

En multipliant l'équation de la concentration par $\mu'(c^\varepsilon)$ on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t\mu(c^\varepsilon) + \mu'(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon + \mu'(c^\varepsilon)\,c^\varepsilon\,q^+ \\ - \operatorname{div}(\mu'(c^\varepsilon)\,d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,\nabla c^\varepsilon) \\ = \mu''(c^\varepsilon)\,d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,\nabla c^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon + \mu'(c^\varepsilon)\,\hat{c}\,q^+. \end{aligned}$$

Le second membre est borné dans $L^1(\Omega_T)$, donc $(\partial_t\mu(c^\varepsilon))$ est borné dans $L^2(0,T;(W^{1,4}(\Omega))')$. En utilisant le lemme précédent, on obtient pour une suite extraite,

$$-\nabla p^\varepsilon = \mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}^\varepsilon \rightharpoonup \overline{\mu}\,\boldsymbol{u} \quad \text{dans } (L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))^d \text{ faible-}*.$$

Ceci donne $\overline{\mu}\,\boldsymbol{u} = -\nabla p$.

En considérant la suite $1/\mu(c^\varepsilon)$ (vérifiant une équation similaire à celle de $\mu(c^\varepsilon)$) on obtient $\overline{\mu}\,\boldsymbol{u} = \mu_{-1}\,\boldsymbol{u}$.

La convexité de μ donne $\overline{\mu} \geq \mu(c)$ et la convexité de $1/\mu$ donne $1/\mu_{-1} \geq 1/\mu(c)$. Donc $\overline{\mu} \geq \mu(c) \geq \mu_{-1}$ et finalement

$$\overline{\mu}\,\boldsymbol{u} = \mu(c)\,\boldsymbol{u} = \mu_{-1}\,\boldsymbol{u} = -\nabla p.$$

D'où $\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\mu(c)}\,\nabla p$.

On montre ensuite les résultats suivants.

Pour des suites extraites, on a

(i) $\nabla p^\varepsilon \to \nabla p$ fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$;

(ii) $\boldsymbol{u}^\varepsilon \to \boldsymbol{u}$ fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$;

(iii) $c^\varepsilon\,\boldsymbol{u}^\varepsilon \to c\,\boldsymbol{u}$ fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$;

(iv) $\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{u} \cdot \nabla c$ dans $L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega))$ faible ;

(v) On pose, pour $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}_T)$ à support dans $\overline{\Omega} \times [0,T[$,

$$\begin{aligned} D^\varepsilon(\varphi) &= \int_{\Omega_T} d(\boldsymbol{u}^\varepsilon)\,\nabla c^\varepsilon \cdot \nabla\varphi\,dx\,dt \\ &= \sqrt{\varepsilon}\,D_1^\varepsilon(\varphi) + (d_l - d_t)\,D_2^\varepsilon(\varphi) + d_t\,D_3^\varepsilon(\varphi), \end{aligned}$$

avec

$$D_1^\varepsilon(\varphi) = \sqrt{\varepsilon} \int_{\Omega_T} \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt,$$

$$D_2^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \frac{\boldsymbol{u}^\varepsilon \, \boldsymbol{u}^{\varepsilon\top}}{|\boldsymbol{u}^\varepsilon|} \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt,$$

$$D_3^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} |\boldsymbol{u}^\varepsilon| \, \nabla c^\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

Alors

$$D^\varepsilon(\varphi) \to D^0(\varphi) = \int_{\Omega_T} d^0(\boldsymbol{u}) \, \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

Démonstration des points (i)–(v)

(i) La fonction $\boldsymbol{u}$ vérifie

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = q^+ - q^-, \quad \boldsymbol{u} = -\frac{1}{\mu(c)} \nabla p, \quad \boldsymbol{u} \cdot \nu = 0 \text{ sur } \Gamma_T.$$

On a aussi

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}) = 0.$$

Après multiplication par $p^\varepsilon - p$ et intégration sur Ω_T, on obtient

$$\int_{\Omega_T} (\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}) \cdot \nabla(p^\varepsilon - p) \, dxdt = 0.$$

On peut alors écrire

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} \frac{1}{\mu(c^\varepsilon)} |\nabla(p^\varepsilon - p)|^2 \, dxdt \\
&= \int_{\Omega_T} \left(\frac{1}{\mu(c)} - \frac{1}{\mu(c^\varepsilon)} \right) \nabla p \cdot \nabla(p^\varepsilon - p) \, dxdt \\
&= \int_{\Omega_T} \left(\boldsymbol{u}^\varepsilon + \frac{1}{\mu(c^\varepsilon)} \nabla p \right) \cdot \nabla p \, dxdt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} \frac{1}{\mu(c)} \nabla p \cdot \nabla(p^\varepsilon - p) \, dxdt.
\end{aligned}
$$

Le terme de droite tend vers

$$
\int_{\Omega_T} \left(-\frac{1}{\mu(c)} + \frac{1}{\mu_{-1}} \right) \nabla p \cdot \nabla p \, dxdt,
$$

et ce terme est 0 puisque $\mu(c)\, \boldsymbol{u} = \mu_{-1}\, \boldsymbol{u} = -\nabla p$. On déduit alors facilement (i).

(ii) La suite $(\mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u})$ converge dans $(L^2(\Omega_T))^d$ faible vers $\mu(c)\,\boldsymbol{u}$. On a

$$\mu(c^\varepsilon) - \mu(c) - (c^\varepsilon - c)\mu'(c) = \frac{1}{2}\,(c^\varepsilon - c)^2\,\mu''(d^\varepsilon),$$

avec $d^\varepsilon \in (0,1)$, et après multiplication par $\boldsymbol{u}$,

$$\mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u} - \mu(c)\,\boldsymbol{u} - (c^\varepsilon - c)\mu'(c)\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\,(c^\varepsilon - c)^2\,\mu''(d^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}.$$

Le terme de gauche tend vers 0 dans $(L^2(\Omega_T))^d$ faible, donc aussi le terme de droite. D'où

$$\int_{\Omega_T} \mu''(d^\varepsilon)\,(c^\varepsilon - c)^2\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\,dx\,dt \to 0.$$

La stricte convexité de μ implique

$$\int_{\Omega_T} (c^\varepsilon - c)^2\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}\,dx\,dt \to 0,$$

donc $(c^\varepsilon\,\boldsymbol{u})$ converge fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$ vers $c\,\boldsymbol{u}$. Il vient aussi que $(\mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u})$ converge fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$ vers $\mu(c)\,\boldsymbol{u}$.

En écrivant

$$\begin{aligned}
\mu(c^\varepsilon)\,|\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}| &= |\mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}| \\
&\le |\mu(c^\varepsilon)\,\boldsymbol{u}^\varepsilon - \mu(c)\,\boldsymbol{u}| + |\,(\mu(c) - \mu(c^\varepsilon))\,\boldsymbol{u}| \\
&= |\nabla p^\varepsilon - \nabla p| + |\,(\mu(c) - \mu(c^\varepsilon))\,\boldsymbol{u}|,
\end{aligned}$$

on déduit que $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ converge fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$ vers $\boldsymbol{u}$, d'où (ii).
(iii) En écrivant

$$c^\varepsilon \, \boldsymbol{u}^\varepsilon - c\, \boldsymbol{u} = c^\varepsilon \, (\boldsymbol{u}^\varepsilon - \boldsymbol{u}) + (c^\varepsilon - c)\, \boldsymbol{u},$$

on obtient que $(c^\varepsilon \, \boldsymbol{u}^\varepsilon)$ converge fortement dans $(L^2(\Omega_T))^d$ vers $c\, \boldsymbol{u}$. D'où (iii).

(iv) Avec l'équation de la pression on a

$$\boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon = \mathrm{div}(c^\varepsilon \, \boldsymbol{u}^\varepsilon) - c^\varepsilon \, (q^+ - q^-).$$

Passant à la limite, on déduit (iv).

(v) On montre que la suite $(D_1^\varepsilon(\varphi))$ est bornée, ce qui implique

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sqrt{\varepsilon} D_1^\varepsilon(\varphi) = 0.$$

On écrit $D_2^\varepsilon(\varphi)$ sous la forme

$$D_2^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \frac{\boldsymbol{u}^\varepsilon}{|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}} \cdot \nabla c^\varepsilon \frac{\boldsymbol{u}^\varepsilon}{|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2}} \nabla \varphi \, dx\, dt.$$

On montre que $(\boldsymbol{u}^\varepsilon)$ est borné dans $(L^r(\Omega_T))^d$, avec $r > 2$. On introduit ensuite la fonction $\boldsymbol{\Psi}$ définie par $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ si $\boldsymbol{v} \neq 0$ et $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{v}) = 0$ sinon. Puis on montre que $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \to \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u})$ p.p. dans Ω_T, et que $(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^\varepsilon))$ est borné dans $(L^{2r}(\Omega_T))^d$.

Ensuite on montre (pour une suite extraite) que

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \to \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}) \quad \text{fortement dans } (L^4(\Omega_T))^d,$$

ce qui implique

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \cdot \nabla\varphi \to \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}) \cdot \nabla\varphi \quad \text{fortement dans } L^4(\Omega_T).$$

On a aussi (pour une suite extraite)

$$|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \to |\boldsymbol{u}|^{1/2} \quad \text{fortement dans } L^4(\Omega_T).$$

Notons

$$\xi^\varepsilon = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}^\varepsilon) \cdot \nabla c^\varepsilon,$$

de sorte que

$$\xi^\varepsilon |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} = \boldsymbol{u}^\varepsilon \cdot \nabla c^\varepsilon.$$

La suite (ξ^ε) est bornée dans $L^2(\Omega_T)$. Alors il existe $\xi \in L^2(\Omega_T)$ tel que, pour une suite extraite, $\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi$ dans $L^2(\Omega_T)$ faible. On en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_2^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \xi \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}) \cdot \nabla\varphi \, dxdt.$$

On vérifie ensuite que

$$\xi \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{u}) \cdot \nabla \varphi = \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \nabla c)(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi)}{|\boldsymbol{u}|},$$

d'où il résulte que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D_2^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \frac{\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^\top}{|\boldsymbol{u}|} \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dxdt.$$

Pour déterminer la limite de $D_3^\varepsilon(\varphi)$ on introduit la suite

$$\boldsymbol{\xi}^\varepsilon = |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla c^\varepsilon,$$

de sorte que

$$D_3^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi}^\varepsilon \cdot (|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla \varphi) \, dxdt.$$

Il existe $\boldsymbol{\xi} \in (L^2(\Omega_T))^d$ tel que, pour une suite extraite, $\boldsymbol{\xi}^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{\xi}$ dans $(L^2(\Omega_T))^d$ faible. On a ensuite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D_3^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} \boldsymbol{\xi} \cdot (|\boldsymbol{u}|^{1/2} \nabla \varphi) \, dxdt.$$

Pour caractériser $\boldsymbol{\xi}$ on écrit

$$\begin{aligned} u_i^\varepsilon \boldsymbol{\xi}^\varepsilon &= u_i^\varepsilon |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla c^\varepsilon \\ &= |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla (c^\varepsilon u_i^\varepsilon) - c^\varepsilon |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla u_i^\varepsilon, \quad 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

On montre que

$$|\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla (c^\varepsilon u_i^\varepsilon) \rightharpoonup |\boldsymbol{u}|^{1/2} \nabla (c u_i) \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega_T))^d,$$

et

$$c^\varepsilon |\boldsymbol{u}^\varepsilon|^{1/2} \nabla u_i^\varepsilon \rightharpoonup c |\boldsymbol{u}|^{1/2} \nabla u_i \quad \text{dans } (\mathcal{D}'(\Omega_T))^d.$$

On déduit ensuite que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D_3^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} |\boldsymbol{u}| \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx dt.$$

On conclut que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} D^\varepsilon(\varphi) = \int_{\Omega_T} d^0(\boldsymbol{u}) \, \nabla c \cdot \nabla \varphi \, dx \, dt.$$

La démonstration du théorème d'existence d'une solution faible du problème $(\mathcal{P}_0)$ s'ensuit.