Approximation asymptotique des valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur de Laplace dans un domaine à frontière oscillante

Youcef Amirat
Laboratoire de Mathématiques
Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS

Gregory A. Chechkin
Moscow State University

Rustem R. Gadyl'shin
Russian Academy of Sciences, Ufa

On considère le problème spectral

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon \backslash \Gamma_\varepsilon, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω^ε est un domaine à frontière oscillante, Γ_ε est la frontière oscillante, et ν est la normale unité (sur la partie non oscillante) extérieure à Ω^ε.

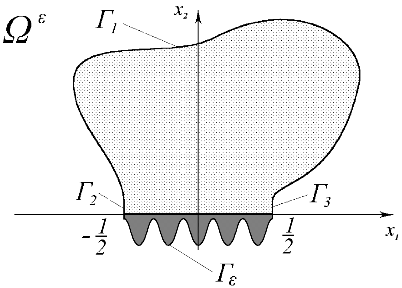

FIGURE – Membrane with oscillating boundary.

L'ouvert Ω^ε est une perturbation d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ situé dans le demi-plan supérieur. On suppose que la frontière de Ω est régulière et se décompose ainsi : $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où Γ_0 est le segment $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, et Γ_2 et Γ_3 sont rectilignes et contenues dans les droites $x_1 = -\frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{1}{2}$, respectivement.

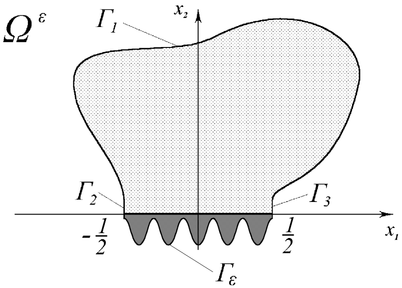

FIGURE – Membrane with oscillating boundary.

Soit $F(\xi_1)$ une fonction 1-périodique en ξ_1 paire et telle que $F'(\xi_1) = 0$ pour $\xi_1 = \pm\frac{1}{2}$ et $\xi_1 = 0$, et soit $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$ un petit paramètre ($\mathcal{N}$ étant un entier positif).
On pose

$$\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1, 0) \in \Gamma_0, \ \varepsilon F\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right) < x_2 \leq 0\}$$

et on définit le domaine Ω^ε par (voir Figure)

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \cup \Pi_\varepsilon.$$

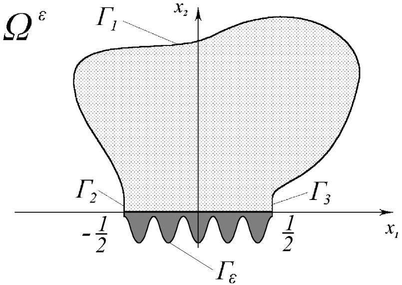

FIGURE – Membrane with oscillating boundary.

Notons

$$\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{1}{2} < \xi_1 < \frac{1}{2}, \ \xi_2 = F(\xi_1)\}$$

et

$$\Pi = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\frac{1}{2} < \xi_1 < \frac{1}{2}, \ \xi_2 > F(\xi_1)\}$$

(Π est une bande semi-infinie, voir Figure).

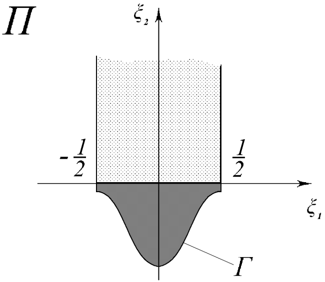

FIGURE – Cell of periodicity.

Alors la frontière de Ω^ε est composée de quatre parties :
$\partial\Omega^\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,\varepsilon} \cup \Gamma_{3,\varepsilon}$, où

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1, 0) \in \Gamma_0, \ x_2 = \varepsilon F\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\},$$

$$\Gamma_{2,\varepsilon} = \Gamma_2 \cup \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -\frac{1}{2}, \ \varepsilon F\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\right) \leq x_2 \leq 0\},$$

$$\Gamma_{3,\varepsilon} = \Gamma_3 \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 = \frac{1}{2}, \ \varepsilon F\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \leq x_2 \leq 0\}.$$

On s'intéresse au comportement asymptotique de λ_ε et u_ε quand $\varepsilon \to 0$.
On distinguera les cas :

– λ_0 **est une valeur propre simple du problème limite**

– λ_0 **est une valeur propre multiple du problème limite**

Théorème. Supposons que λ_0 est une valeur propre simple du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{array} \right. \tag{2}$$

et u_0 est une fonction propre associée, de norme 1 dans $L_2(\Omega)$. Alors
a) il existe une valeur propre simple λ_ε du problème perturbé (1), convergeant vers λ_0 quand $\varepsilon \to 0$;
b) le développement à l'ordre 1 de λ_ε est

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + o(\varepsilon), \text{ avec}$$

$$\lambda_1 = -C(F) \int\limits_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu} \right)^2 \, ds,$$

où $C(F)$ est une constante > 0 ne dépendant que de la fonction F, définie via la solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_\xi X = 0 \quad \text{dans } \Pi, \\ X = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \qquad \frac{\partial X}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{pour } \xi_1 = \pm \frac{1}{2}, \\ X(\xi) = \xi_2 + C(F) \quad \text{pour } \xi_2 \to +\infty. \end{array} \right. \tag{3}$$

Pour établir ce résultat on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés, initiée par A.M. Il'in (1976).

On considère un développement asymptotique à l'intérieur du domaine Ω (dit développement *extérieur*) de la forme

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \dots$$

et un développement en série de la valeur propre λ_ε

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \dots.$$

Comme u_0 n'est pas définie dans un voisinage de Γ_ε, on introduit un développement dit *intérieur* au voisinage de Γ_ε, ensuite on utilise des fonctions de troncature pour construire un développement asymptotique dans tout le domaine Ω^ε.

Considérons le développement de Taylor de u_0 (par rapport à x_2) quand $x_2 \to 0$. Compte tenu du problème limite (2) vérifié par u_0, on a

$$u_0(x) = \alpha_0(x_1)x_2 + O(x_2^3),$$

où $\alpha_0(x_1) = \frac{\partial u_0}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0}$ et

$$\alpha_0'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Par le changement de variables $\xi_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$, on en déduit

$$u_0(x_1, \varepsilon\xi_2) = \varepsilon\alpha_0(x_1)\xi_2 + O(\varepsilon^3\xi_2^3).$$

Par définition, le terme principal du développement intérieur vérifie les conditions aux limites du problème perturbé (1) sur Γ_ε et admet le développement asymptotique (quand $\xi_2 \to +\infty$) comme ci-dessus.

Alors le développement intérieur est de la forme

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon v_1\left(\xi; x_1\right) + \dots$$

où $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$,

$$v_1(\xi; x_1) \sim \alpha_0(x_1)\xi_2 \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty,$$

et x_1 joue le rôle de "variable lente".
On a

$$\Delta\left(v_1(\frac{x}{\varepsilon}; x_1)\right) = \varepsilon^{-2}\Delta_\xi v_1 + 2\varepsilon^{-1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial \xi_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \nu} v_1(\dfrac{x}{\varepsilon}; x_1) = \varepsilon^{-1}\dfrac{\partial v_1}{\partial \xi_1} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad \text{sur } \Gamma_3, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \nu} v_1(\dfrac{x}{\varepsilon}; x_1) = -\varepsilon^{-1}\dfrac{\partial v_1}{\partial \xi_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \quad \text{sur } \Gamma_2. \end{cases}$$

Du problème perturbé (1) on déduit, en identifiant les termes d'ordre ε^{-1} pour l'equation et ε^{0} pour les conditions aux limites, le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1 = 0 \quad \text{dans } \Pi, \\ v_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{pour } \xi_1 = \pm\frac{1}{2}, \\ v_1 \sim \alpha_0(x_1)\xi_2 \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty. \end{cases}$$

Ainsi,

$$v_1(\xi; x_1) = \alpha_0(x_1)X(\xi)$$

où X est la solution de (3) dans la bande semi-infinie, et donc

$$v_1(\xi; x_1) = \alpha_0(x_1)(\xi_2 + C(F)) \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty.$$

Comme

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\xi; x_1) = 0 \quad \text{pour } x_1 = \pm\frac{1}{2},$$

on a

$$\frac{\partial v_1}{\partial \nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{2,\varepsilon} \cup \Gamma_{3,\varepsilon}.$$

Ce développement intérieur a induit un décalage de l'asymptotique à l'infini par le terme : $\varepsilon C(F)\alpha_0(x_1)$.

En introduisant un nouveau terme dans le développement extérieur d'ordre ε, on éliminera ce décalage.

En réécrivant l'asymptotique de εv_1 quand $\xi_2 \to +\infty$ en fonction de la variable x, on voit que le développement extérieur doit être la forme

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots,$$

où

$$u_1(x) \sim C(F)\alpha_0(x_1) \quad \text{quand } x_2 \to 0.$$

Comme u_1 est régulière, ceci revient à poser :

$$u_1(x_1, 0) = C(F)\alpha_0(x_1).$$

D'où la conditions aux limites pour u_1 sur Γ_0.

On écrit ensuite

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \dots$$

En reportant dans le problème perturbé (1), en identifiant les termes d'ordre ε^1, on déduit le problème aux limites pour u_1 :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_0 u_1 + \lambda_1 u_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ u_1 = C(F)\alpha_0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

La constante λ_1 peut être obtenue à partir de la condition de résolubilité de ce problème. En multipliant l'équation précédente de u_1 par u_0 et en tenant compte de la normalisation dans $L_2(\Omega)$, il vient

$$-\int\limits_\Omega \Delta u_1 u_0 \; dx = \lambda_0 \int\limits_\Omega u_1 u_0 \; dx + \lambda_1.$$

En utilisant 2 fois la formule de Green il vient

$$-\int\limits_\Omega \Delta u_1 u_0 \; dx = \int\limits_\Omega (\nabla u_1, \nabla u_0) \; dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_0 \; ds$$

$$= -\int\limits_\Omega u_1 \Delta u_0 \; dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} u_0 \; ds + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial \nu} u_1 \; ds$$

$$= \lambda_0 \int_\Omega u_1 u_0 \, dx - C(F) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_0^2(x_1) \, dx_1.$$

Notons que l'on a utilisé

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu} = -\frac{\partial u_0}{\partial x_2} = -\alpha_0(x_1), \text{ sur } \Gamma_0.$$

On tire

$$\lambda_1 = -C(F) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \alpha_0^2(x_1) \, dx_1.$$

Pour définir u_1 de façon unique on impose

$$\int_\Omega u_0(x) u_1(x) \, dx = 0.$$

Ainsi, la méthode des développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir le correcteur d'ordre 1 de la valeur propre du problème perturbé (1). Pour justifier la construction on continue le processus.

Considérons le développement de Taylor de u_1 (par rapport à x_2) quand $x_2 \to 0$. Puisque $u_1(x)$ est régulière, on peut écrire

$$u_1(x) = u_1(x_1, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, 0)x_2 + \dots$$

donc

$$u_1(x) = C(F)\alpha_0(x_1) + \alpha_1(x_1)x_2 + \dots,$$

où $\alpha_1(x_1) = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x_1, 0)$. Compte tenu de la régularité de u_1 et des conditions de Neumann homogènes sur Γ_2 et Γ_3 vérifiées par u_1, on a

$$\alpha_1'\left(\pm\frac{1}{2}\right) = 0.$$

La construction du développement extérieur a entraîné un décalage de l'asymptotique en zéro par le terme : $\varepsilon^2\alpha_1(x_1)$.
En introduisant un nouveau terme d'ordre 2 dans le développement intérieur, on éliminera ce décalage.

Précisément, réécrivant l'asymptotique $u_0 + \varepsilon u_1$ (quand $x_2 \to 0$) en posant $x_2 = \varepsilon\xi_2$, on déduit que le développement intérieur doit être de la forme

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon v_1(\xi; x_1) + \varepsilon^2 v_2(\xi; x_1) + \dots,$$

où

$$v_2(\xi; x_1) \sim \alpha_1(x_1)\xi_2 \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty.$$

En reportant ce développement intérieur de u_ε dans le problème perturbé (1) et en identifiant les termes d'ordre ε^0 pour l'équation et ε pour les conditions aux limites, on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta_\xi v_2 = 2\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial \xi_1} \quad \text{dans } \Pi, \\ v_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \qquad \dfrac{\partial v_2}{\partial \xi_1} = 0 \quad \text{en } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Considérons le problème auxiliaire dans la bande semi-infinie Π :

$$\Delta_\xi \widetilde{X} = \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \quad \text{dans } \Pi, \qquad \widetilde{X} = 0 \quad \text{sur } \partial\Pi.$$

On montre que ce problème a une solution vérifiant

$$\widetilde{X}(\xi) = 0 \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty.$$

Notons que, par suite de la parité de F, la solution $\widetilde{X}$ est paire en ξ_1, et donc admet un prolongement 1-périodique par rapport à ξ_1.

Alors il est facile de voir que la fonction

$$v_2(\xi; x_1) = \alpha_1(x_1) X(\xi) - 2\alpha_0'(x_1)\widetilde{X}(\xi)$$

est la solution 1-périodique cherchée, qui admet pour asymptotique

$$v_2(\xi; x_1) = \alpha_1(x_1)\xi_2 + C(F)\alpha_1(x_1) \quad \text{quand } \xi_2 \to +\infty.$$

De plus on vérifie que

$$\frac{\partial v_2}{\partial \nu}\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{2,\varepsilon} \cup \Gamma_{3,\varepsilon}.$$

Notons par $\chi(s)$ une fonction de troncature, $\chi(s) = 0$ pour $s < 1$ et $\chi(s) = 1$ pour $s > 2$. Définissons aussi $\widetilde{\chi}_t(x_2) = \chi\left(\frac{x_2}{t}\right)$, qui vaut 0 pour $x_2 < t$ et 1 pour $x_2 > 2t$, où $t > 0$ est suffisamment grand.
Posons

$$\widetilde{\lambda}_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1,$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_\varepsilon(x) &= \left(u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x)\right)\chi\left(\frac{x_2}{\varepsilon^\beta}\right) \\ &+ \left(\varepsilon v_1\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right) + \varepsilon^2 v_2\left(\frac{x}{\varepsilon}; x_1\right)\right)\left(1 - \chi\left(\frac{x_2}{\varepsilon^\beta}\right)\right),\end{aligned}$$

où β est un réel fixé ($0 < \beta < 1$), et

$$u_2(x) = C(F)\alpha_1(x_1)(1 - \widetilde{\chi}_t(x_2)).$$

On vérifie que :

$$\widetilde{u}_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial \widetilde{u}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,\varepsilon} \cup \Gamma_{3,\varepsilon}.$$

De plus, on peut écrire

$$-\Delta \widetilde{u}_\varepsilon = \widetilde{\lambda}_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon + f_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon,$$

avec, en choisissant $\frac{2}{3} < \beta < 1$,

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = o(\varepsilon).$$

Notons que l'on a aussi

$$\|\widetilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)} = 1 + o(1).$$

Pour conclure on utilise le lemme suivant.

Lemme. Considérons le problème aux limites, avec $F_\varepsilon \in L^2(\Omega^\varepsilon)$:

$$\begin{cases} -\Delta U_\varepsilon = \lambda U_\varepsilon + F_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega^\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \qquad \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_{2,\varepsilon} \cup \Gamma_{3,\varepsilon}. \end{cases} \tag{4}$$

Supposons que λ_0 est une valeur propre du problème (2) d'ordre $p \geq 1$. Alors

(i) Il y a exactement p valeurs propres du problème perturbé (1) convergeant vers λ_0, quand $\varepsilon \to 0$;

(ii) pour λ proche de λ_0 la solution U_ε du problème (4) vérifie l'estimation

$$\|U_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{C} \frac{\|F_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\prod\limits_{j=1}^{p} |\lambda_\varepsilon^j - \lambda|}$$

où $\lambda_\varepsilon^1, \ldots, \lambda_\varepsilon^p$ sont les valeurs propres du problème (1), convergeant vers λ_0 ;

(iii) si une solution U_ε du problème (4) est orthogonale dans $L_2(\Omega^\varepsilon)$ à la fonction propre u_ε^k du problème (1), correspondant à λ_ε^k, alors

$$\|U_\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq \mathcal{C} \frac{\|F_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^\varepsilon)}}{\prod\limits_{j=1; j\neq i}^{p} |\lambda_\varepsilon^j - \lambda|}.$$

Cas où λ_0 est une valeur propre multiple.

On suppose, sans perte de généralité, que λ_0 est double. Soit $u_0^{(l)}$ $(l = 1, 2)$ les fonctions propres associées, orthonormées dans $L_2(\Omega)$, i.e.

$$\begin{cases} -\Delta u_0^{(l)} = \lambda_0 u_0^{(l)} \text{ dans } \Omega, \\ u_0^{(l)} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

$$\int\limits_{\Omega} (u_0^{(l)})^2 \, dx = 1, \quad \int_{\Omega} u_0^{(1)} \, u_0^{(2)} \, dx = 0, \quad l = 1, 2.$$

On peut aussi imposer :

$$\int\limits_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial \nu} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \nu} \, ds = 0.$$

En outre, pour simplifier on suppose que

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1 \neq \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x_2} \right)^2 dx_1.$$

D'après le lemme précédent il y a 2 valeurs propres du problème (1), convergeant vers λ_0, quand $\varepsilon \to 0$. Notons ces valeurs propres par $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ et $\lambda_\varepsilon^{(2)}$; les fonctions propres associées et orthonormées dans $L_2(\Omega_\varepsilon)$ sont notées $u_\varepsilon^{(l)}$ $(l = 1, 2)$.

Théorème. Sous les hypothèses et notations précédentes, les valeurs propres $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ du problème (1), convergeant vers λ_0 quand $\varepsilon \to 0$, et les fonctions propres associées $u_\varepsilon^{(l)}$ admettent les développements asymptotiques :

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1^{(l)} + o\left(\varepsilon^{\frac{5}{4}-\sigma}\right) \quad \text{for any } \sigma > 0,$$

$$\lambda_1^{(l)} = -\,C(F)\int\limits_{\Gamma_0}\left(\frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial\nu}\right)^2 ds,$$

$$\|u_\varepsilon^{(l)} - u_0^{(l)}\|_{H^1(\Omega)} + \|u_\varepsilon^{(l)}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon\setminus\overline{\Omega})} = o(1).$$

Remarque. Par la méthode des développements asymptotiques raccordés on peut généraliser ce théorème et établir les développements asymptotiques de $\lambda_\varepsilon^{(l)}$ et $u_\varepsilon^{(l)}$ à n'importe quel ordre.

Construction formelle des asymptotiques

On écrit le développement extérieur :

$$u_\varepsilon^{(l)}(x) = u_0^{(l)}(x) + \varepsilon u_1^{(l)}(x) + \varepsilon^2 u_2^{(l)}(x) + \varepsilon^3 u_3^{(l)}(x) + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon^i u_i^{(l)}(x),$$

les séries pour les valeurs propres

$$\lambda_\varepsilon^{(l)} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1^{(l)} + \varepsilon^2 \lambda_2^{(l)} + \varepsilon^3 \lambda_3^{(l)} + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon^i \lambda_i^{(l)}$$

et le développement intérieur :

$$u_\varepsilon^{(l)}(x) = \varepsilon v_1^{(l)}(\xi; x_1) + \varepsilon^2 v_2^{(l)}(\xi; x_1) + \varepsilon^3 v_3^{(l)}(\xi; x_1) + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon^i v_i^{(l)}(\xi; x_1),$$

où $\xi = \frac{x}{\varepsilon}$.

On injecte ces développements dans le problème perturbé (1) et on trouve que les fonctions $u_i^{(l)}$ $(i = 1, 2, 3)$ satisfont les problèmes aux limites suivants

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{(l)} = \lambda_0 u_1^{(l)} + \lambda_1^{(l)} u_0^{(l)} \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{(l)} = \lambda_0 u_2^{(l)} + \lambda_1^{(l)} u_1^{(l)} + \lambda_2^{(l)} u_0^{(l)} \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_3^{(l)} = \lambda_0 u_3^{(l)} + \lambda_1^{(l)} u_2^{(l)} + \lambda_2^{(l)} u_1^{(l)} + \lambda_3^{(l)} u_0^{(l)} \\ \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_3^{(l)}}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3. \end{cases}$$

On complète ces problèmes en rajoutant des conditions aux limites sur Γ_0 de la forme

$$u_i^{(l)} = \alpha_{i0}^{(l)} \text{ sur } \Gamma_0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

où $\alpha_{i0}^{(l)}(x_1)$ sont des fonctions inconnues vérifiant

$$\left.\frac{d^{2k+1}\alpha_{i0}^{(l)}}{dx_1^{2k+1}}\right|_{x_1=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Condition (23) is necessary for solvability of recurrent system of boundary value problems (23)–(23) in $C^\infty(\overline{\Omega})$. Moreover such solutions do exist if these problems are solvable in $H^1(\Omega)$, and in addition we deduce from the boundary value problems that the following formulae

$$\left.\frac{d^{2k+1}\alpha_{ij}^{(l)}}{dx_1^{2k+1}}\right|_{x_1=\pm\frac{1}{2}} = 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

are true, where

$$\alpha_{ij}^{(l)}(x_1) = \frac{1}{j!}\left.\frac{\partial^j u_i^{(l)}}{\partial x_2^j}\right|_{x_2=0}, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

Also it should be noted that it follows from Problem (2) that

$$\alpha_{02}^{(l)}(x_1) \equiv 0.$$

Note that if $\mathcal{F} \in H^1(\Omega)$ and $\alpha \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ then for solvability in $H^1(\Omega)$ of the boundary value problem

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0 u + \mathcal{F} \ \text{ in } \Omega, \\ u = \alpha \ \text{ on } \Gamma_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ on } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \end{cases}$$

it is necessary and sufficient to have the two identities

$$\int \mathcal{F} u_0^{(l)} \, dx = \int \alpha \frac{\partial u_0^{(l)}}{\partial \nu} \, ds, \quad l = 1, 2.$$

De façon analogue on obtient les équations et conditions aux limites vérifiées par les fonctions $v_i^{(l)}$:

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1^{(l)} = 0 \ \text{ dans } \Pi, \\ v_1^{(l)} = 0 \ \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial v_1^{(l)}}{\partial \xi_1} = 0 \ \text{ pour } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \ x_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta_\xi v_2^{(l)} = 2\dfrac{\partial^2 v_1^{(l)}}{\partial x_1 \partial \xi_1} \ \text{ dans } \Pi, \\ v_2^{(l)} = 0 \ \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial v_2^{(l)}}{\partial \xi_1} = -\dfrac{\partial v_1^{(l)}}{\partial x_1} \ \text{ pour } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \ x_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta_\xi v_3^{(l)} = 2\dfrac{\partial^2 v_2^{(l)}}{\partial x_1 \partial \xi_1} + \dfrac{\partial^2 v_1^{(l)}}{\partial x_1^2} + \lambda_0 v_1^{(l)} \ \text{ dans } \Pi, \\ v_3^{(l)} = 0 \ \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial v_3^{(l)}}{\partial \xi_1} = -\dfrac{\partial v_2^{(l)}}{\partial x_1} \ \text{ pour } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \ x_1 = \pm\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

On rajoute les conditions à l'infini (quand $\xi_2 \to +\infty$), en raccordant les développements intérieurs et extérieurs. On obtient

$$\sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i u_i^{(l)}(x) = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon^i V_i^{(l)}(\xi; x_1) + O\left(\varepsilon^4(\xi_2^4 + \xi_2)\right)$$
$$\text{quand} \quad x_2 = \varepsilon\xi_2 \to 0,$$

où

$$V_1^{(l)} = \alpha_{01}^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_{10}^{(l)}(x_1),$$
$$V_2^{(l)} = \alpha_{11}^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_{20}^{(l)}(x_1),$$
$$V_3^{(l)} = \alpha_{03}^{(l)}(x_1)\xi_2^3 + \alpha_{12}^{(l)}(x_1)\xi_2^2 + \alpha_{21}^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_{30}^{(l)}(x_1).$$

On doit trouver $\lambda_i^{(l)}$ et $\alpha_{i0}^{(l)}(x_1)$ de sorte que les différents problèmes aux limites vérifiés par $u_i^{(l)}$ et $v_i^{(l)}$ soient résolubles et que :

$$v_i^{(l)} \sim V_i^{(l)} \text{ quand } \xi_2 \to +\infty.$$

Déterminons $\alpha_{10}^{(l)}(x_1)$ et $v_1^{(l)}(\xi; x_1)$. On vérifie que la fonction définie par

$$v_1^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_{01}^{(l)}(x_1) X(\xi)$$

est la solution 1-périodique du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta_\xi v_1^{(l)} = 0 \ \text{ dans } \Pi, \\ v_1^{(l)} = 0 \ \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial v_1^{(l)}}{\partial \xi_1} = 0 \ \text{ pour } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \ x_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

ayant pour asymptotique

$$v_1^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_{01}^{(l)}(x_1)(\xi_2 + C(F)) \ \text{ quand } \xi_2 \to +\infty.$$

Alors, en posant

$$\alpha_{10}^{(l)}(x_1) = C(F) \alpha_{01}^{(l)}(x_1),$$

on obtient que $v_1^{(l)}$ ainsi définie satisfait aussi

$$v_1^{(l)} \sim V_1^{(l)} = \alpha_{01}^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_{10}^{(l)}(x_1) \ \text{ quand } \xi_2 \to +\infty.$$

On a ainsi construit $\alpha_{10}^{(l)}$ et $v_1^{(l)}$.

On détermine ensuite $\lambda_1^{(l)}$ et $u_1^{(l)}$.

$$\lambda_1^{(l)} = -C(F) \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\alpha_{01}^{(l)})^2(x_1)\ dx_1.$$

On choisit $u_1^{(l)}$ de la forme :

$$u_1^{(l)} = \widetilde{u}_1^{(l)} + \kappa_1^{(l)} u_0^{(l^*)},$$

où

$$\int\limits_{\Omega} \widetilde{u}_1^{(l)}(x) u_0^{(k)}(x)\ dx = 0, \quad l, k = 1, 2$$

et les constantes $\kappa_1^{(l)}$ sont arbitraires (à définir plus loin de sorte que $u_2^{(l)}$ existe). Ici, $l^* = 1$ if $l = 2$ et $l^* = 2$ if $l = 1$. Ainsi,

$$\alpha_{11}^{(l)} = \widetilde{\alpha}_{11}^{(l)} + \kappa_1^{(l)} \alpha_{01}^{(l^*)},$$

où

$$\widetilde{\alpha}_{11}^{(l)} = \left.\frac{\partial \widetilde{u}_1^{(l)}}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}, \ \left.\frac{d^{2k+1}\widetilde{\alpha}_{11}^{(l)}}{dx_1^{2k+1}}\right|_{x_1=\pm\frac{1}{2}} = 0,\ k = 0, 1, \ldots$$

On détermine ensuite $\alpha_{20}^{(l)}(x_1)$ et $v_2(\xi; x_2)$. Soit $\widetilde{X}$ la solution du problème, dans la bande semi-infinieΠ,

$$\begin{cases} \Delta_\xi \widetilde{X} = \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \text{ in } \Pi, \\ \widetilde{X} = 0 \text{ on } \partial\Pi, \quad \widetilde{X}(\xi) = 0 \text{ quand } \xi_2 \to +\infty. \end{cases}$$

Alors, la fonction définie par

$$v_2^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_{11}^{(l)}(x_1) X(\xi) - 2(\alpha_{01}^{(l)})'(x_1)\widetilde{X}(\xi)$$

est la solution 1-périodique du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta_\xi v_2^{(l)} = 2\dfrac{\partial^2 v_1^{(l)}}{\partial x_1 \partial \xi_1} \text{ dans } \Pi, \\ v_2^{(l)} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ \dfrac{\partial v_2^{(l)}}{\partial \xi_1} = 0 \text{ pour } \xi_1 = \pm\dfrac{1}{2},\ x_1 = \pm\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

$$v_2^{(l)}(\xi; x_1) = \alpha_{11}^{(l)}(x_1)\left(\xi_2 + C(F)\right) \text{ as } \xi_2 \to +\infty,$$

vérifiant aussi $v_2(l) \sim V_2^{(l)} = \alpha_{11}^{(l)}(x_1)\xi_2 + \alpha_{20}^{(l)}(x_1)$, si on choisit

$$\alpha_{20}^{(l)}(x_1) = C(F)\left(\widetilde{\alpha}_{11}^{(l)} + \kappa_1^{(l)}\alpha_{01}^{(l^*)}\right).$$

Ainsi on a défini $v_2^{(l)}$ et $\alpha_{20}^{(l)}$ (modulo $\kappa_1^{(l)}$, qui est encore inconnue).

On détermine ensuite $\lambda_2^{(l)}$, $u_2^{(l)}$ et $\kappa_1^{(l)}$. On obtient

$$\lambda_2^{(l)} = -C(F) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\alpha}_{11}^{(l)}(x_1)\alpha_{01}^{(l)}(x_1)\ dx_1$$

puis

$$\kappa_1^{(l)} = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\alpha}_{11}^{(l)}(x_1)\alpha_{01}^{(l^*)}(x_1)\ dx_1 \right) \Bigg/ \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\left(\alpha_{01}^{(l)}\right)^2 (x_1) - \left(\alpha_{01}^{(l^*)}\right)^2 (x_1) \right)\ dx_1 \right).$$

D'où $u_1^{(l)}$. On choisit $u_2^{(l)}$ de la forme :

$$u_2^{(l)} = \widetilde{u}_2^{(l)} + \kappa_2^{(l)} u_0^{(l^*)},$$

où

$$\int_\Omega \widetilde{u}_2^{(l)}(x)u_0^{(k)}(x)\ dx = 0, \quad l,k = 1,2$$

et les constantes $\kappa_2^{(l)}$ sont arbitraires.
...ETC...