Fluides au contact de parois rugueuses

Youcef Amirat
Laboratoire de Mathématiques UMR 6620
Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS, France

En collaboration avec

Olivier Bodart (Université Clermont-Ferrand 2 et CNRS, France)
Umberto De Maio (University Federico II, Naples, Italy)
Antonio Gaudiello (University of Cassino, Italy)

Workshop Fluides incompressibles, Alger, 2004

On considère un fluide visqueux incompressible remplissant un domaine horizontal infini, limité en-dessous par une paroi lisse $\mathcal{P}$ et au-dessus par une paroi rugueuse $\mathcal{R}_\varepsilon$.
$\mathcal{R}_\varepsilon$ est un plan couvert d'aspérités périodiques dont la taille dépend d'un petit paramètre $\varepsilon > 0$. Son profil est

$$\eta_\varepsilon(x') = l_3\left(1 + \varepsilon^\alpha \eta(\frac{x'}{\varepsilon})\right),$$

avec η périodique de periodes l_1 et l_2 par rapport à x_1 et x_2, et $0 \leq \alpha \leq 1$.

Le domaine du fluide est

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \left\{(x', x_3) \in \mathbf{R}^3 : \ x' \in \mathbf{R}^2, \ b(x') < x_3 < \eta_\varepsilon(x')\right\},$$

où $x' = (x_1, x_2)$. $\mathcal{O}_\varepsilon$ est limité inférieurement par

$$\mathcal{P} = \left\{\left(x', x_3\right) \in \mathbf{R}^3 : \ x' \in \mathbf{R}^2, \ x_3 = b(x')\right\},$$

et supérieurement par $\mathcal{R}_\varepsilon = \partial\mathcal{O}_\varepsilon \backslash \mathcal{P}$.
La fonction b est périodique de periodes l_1 et l_2 par rapport à x_1 et x_2.

On note u_ε et p_ε, respectivement, la vitesse et la pression dans $\mathcal{O}_\varepsilon$, et u, p les limites de u_ε, p_ε, quand $\varepsilon \to 0$. Généralement, ces limites ne sont pas des approximations satisfaisantes de u_ε et p_ε, au voisinage de la paroi rugueuse. Dans le cas $\alpha > 0$ on montre que

$$\|u_\varepsilon - u\|_{H^1} = O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}), \qquad \|p_\varepsilon - p\|_{L^2} = O(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}})$$

Notre objectif est la construction d'une approximation asymptotique d'ordre 1. On considère ici le cas $\alpha = 0$ (très fortes oscillations). Soit $0 < a_i < b_i < l_i, \quad i = 1, 2$. On note

$$S = (0, l_1) \times (0, l_2), \quad \tilde{S} = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2), \quad S_\varepsilon = \varepsilon S, \quad \tilde{S}_\varepsilon = \varepsilon \tilde{S},$$

et soit η_ε la fonction S_ε-périodique définie sur S_ε par

$$\eta_\varepsilon(x') = \begin{cases} l_3' & \text{si } \ x' \in S_\varepsilon, \\ \\ l_3 & \text{si } \ x' \in S_\varepsilon \backslash \tilde{S}_\varepsilon, \end{cases}$$

avec $l_3' > l_3 > 0$. On suppose que $1/\varepsilon \in \mathbb{N}$ de sorte que η_ε est aussi S-périodique.

Ainsi $\mathcal{O}_\varepsilon$ est généré par des translations du domaine borné de $\mathbf{R}^3$

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 : x' \in S, \quad b(x') < x_3 < \eta_\varepsilon\left(x'\right)) \right\}.$$

On note

$$P = \left\{ x = \left(x', x_3\right) \in \mathbf{R}^3 : x' \in S,\, x_3 = b(x_1) \right\},$$
$$L = \left\{ x = \left(x', x_3\right) \in \mathbf{R}^3 : x' \in \partial S, \quad b(x') < x_3 < \eta_\varepsilon\left(x'\right) \right\},$$

et $R_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \backslash \left(P \cup L\right)$.

La vitesse u_ε et la pression p_ε satisfont les équations de Stokes stationnaires :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f \qquad \text{dans} \;\; \Omega_\varepsilon, \\ \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 \qquad \text{dans} \;\; \Omega_\varepsilon, \\ \\ u_\varepsilon = 0 \qquad \text{sur} \;\; R_\varepsilon, \\ \\ u_\varepsilon = g \qquad \text{sur} \;\; P \\ \\ \displaystyle\int_{\Omega^-} p_\varepsilon \; dx = 0, \end{cases}$$

où f et g sont des fonctions régulières données.

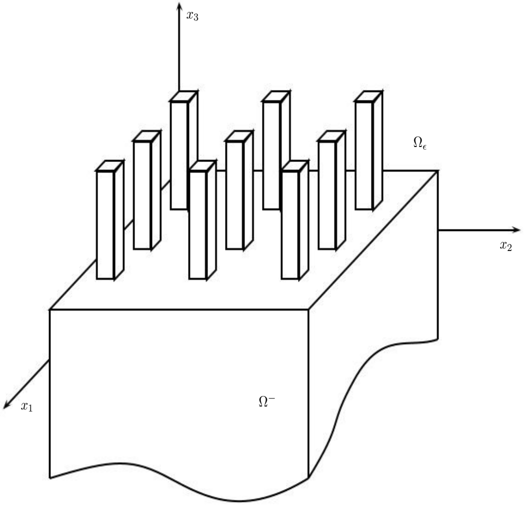

FIGURE – Domain Ω_ε

Considérons d'abord le cas d'un écoulement longitudinal.

Écoulement longitudinal

Soit $0 < a_1 < b_1 < l_1$ et soit η_ε une fonction εl_1-périodique définie sur $(0, \varepsilon l_1)$ par

$$\eta_\varepsilon(x_1) = \begin{cases} l_3' & \text{if } \; x_1 \in (\varepsilon a_{1,} \varepsilon b_1), \\ \\ l_3 & \text{if } \; x_1 \in (0, \varepsilon l_1) \backslash (\varepsilon a_{1,} \varepsilon b_1), \end{cases}$$

avec $l_3' > l_3 > 0$. Comme $1/\varepsilon \in \mathbb{N}$, la fonction η_ε est aussi périodique de période l_1. Alors $\mathcal{O}_\varepsilon$ peut être vu comme généré par des translations périodiques du domaine

$$\left\{ x \in \mathbf{R}^2 : \; 0 < x_1 < l_1, \; b(x_1) < x_3 < \eta_\varepsilon\left(x_1\right)\right) \right\}.$$

L'écoulement longitudinal est décrit par la vitesse v_ε de la forme $v_\varepsilon = (0, u_\varepsilon, 0)$ (et la pression $p_\varepsilon = 0$) où u_ε vérifie

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } R_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = g \quad \text{sur } P, \\ u_\varepsilon \quad l_1\text{-périodique par rapport à } x_1, \end{cases}$$

Ω_ε est la section bi-dimensionnelle

$$\Omega_\varepsilon = \{x = (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 < l_1,\ b(x_1) < x_3 < \eta_\varepsilon(x_1)\},$$

$$P = \left\{x = (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x_1 < l_1,\ x_3 = b(x_1)\right\},$$

$$L = \left\{x = (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 0,\ b(0) < x_3 < \eta(0)\right\}$$

$$\cup \left\{x = (x_1, x_3) \in \mathbf{R}^2 : x_1 = l_1,\ b(l_1) < x_3 < \eta(l_1)\right\},$$

et $R_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \setminus (P \cup L)$, $\partial\Omega_\varepsilon$ étant la frontière de Ω_ε.

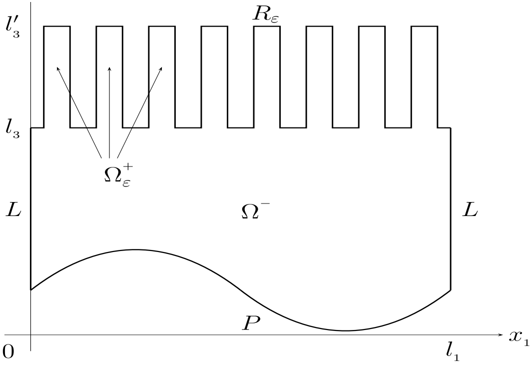

Figure 1: Vertical section of the domain Ω_ε

Les problèmes aux limites dans des domaines à frontière oscillante, particulièrement dans le cas où la fréquence et l'amplitude des oscillations de la frontière sont du même ordre ε, ont été étudiés, du point de vue de l'approximation asymptotique, par plusieurs auteurs :

Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin

G. Allaire, M. Amar

Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine, J. Simon

Y. Amirat, G.A. Chechkin, R.R. Gadyl'shin

A.G. Belyaev

G.A. Chechkin, A Friedman, A.L. Piatniski

A.M. Il'n

W. Jäger, A. Mikelić

O.A. Oleinik, A.S Shamaev, G.A. Yosifian

On s'intéresse à l'approximation asymptotique de la solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } R_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = g \quad \text{sur } P, \\ u_\varepsilon \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon). \end{cases}$$

Ici, f est une fonction régulière, g est une constante donnée (on pourrait prendre une fonction régulière, l_1-périodique),

$$D_\varepsilon = \{x = (x_1, x_3) : x_1 \in \mathbf{R},\ b(x_1) < x_3 < \eta_\varepsilon(x_1)\},$$

et, pour $m \geq 0$,

$$H^m_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon) = \{u \in H^m_{\mathrm{loc}}(D_\varepsilon)\,;\, u \in H^m(\Omega_\varepsilon),$$

$$u(x_1 + l_1, x_3) = u(x_1, x_3),\ x_3 \in (b(x_1), l_3)\},$$

muni de la norme de $H^m(\Omega_\varepsilon)$.

Convergence

On note

$$\begin{cases} \Omega_\varepsilon^+ = \{(x_1,x_3) \in \Omega_\varepsilon : \ l_3 < x_3 < l_3'\}, \\ \\ \Omega^+ = (0, l_1) \times (l_3, l_3'), \\ \\ \Omega^- = \{(x_1,x_3) \in \Omega_\varepsilon : \ b(x_1) < x_3 < l_3\}, \\ \\ \Sigma = (0, l_1) \times \{l_3\}, \\ \\ \Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup \Sigma. \end{cases}$$

On suppose que b est Lipschitzienne et $f \in L^2(\Omega)$.
Notons

$$u = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ u^- & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

où u^- est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta u^- = f \ \text{ dans } \Omega^-, \\ u^- = 0 \ \text{ sur } \Sigma, \\ u^- = g \ \text{ sur } P, \\ u^- \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega^-). \end{cases}$$

Proposition. *Soit $\widetilde{u_\varepsilon}$ le prolongement par zéro de u_ε dans Ω. Alors*

$$\widetilde{u_\varepsilon} \to u \quad \text{fortement dans } H^1(\Omega).$$

Ce résultat de convergence a été obtenu dans un cadre plus général des problèmes d'optimisation de forme, voir O. Pironneau, *Springer (1984)*.

Décroissance exponentielle

Pour construire une approximation asymptotique de la solution u_ε, on considère un problème aux limites auxiliaire dans un domaine vertical infini de $\mathbb{R}^2$.
Soit

$$\Lambda^+ = (a_1, b_1) \times (0, +\infty)\,, \quad \Lambda^- = (0, l_1) \times (-\infty, 0)\,.$$

On note $\psi^\pm$ les fonctions définies par

$$\begin{cases} \psi^+ \in H^1(\Lambda^+), \\ \psi^- \in H^1_{\mathrm{loc,per}}(\Lambda^-), \quad \nabla\psi^- \in L^2(\Lambda^-), \end{cases}$$

vérifiant

$$
\begin{cases}
\Delta\psi^{\pm} = 0 & \text{dans } \Lambda^{\pm}, \\
\psi^{+} = 0 & \text{sur } \partial\Lambda^{+}\backslash\Gamma, \\
\psi^{-} = 0 & \text{sur } \left((0, a_1) \cup (b_1, l_1)\right) \times \{0\}, \\
\psi^{+} = \psi^{-} & \text{sur } \Gamma, \\
\dfrac{\partial\psi^{+}}{\partial y_3} = \dfrac{\partial\psi^{-}}{\partial y_3} + 1 & \text{sur } \Gamma,
\end{cases}
$$

où $\Gamma = (a_1, b_1) \times \{0\}$.

On note β la moyenne de ψ^{-} sur une section horizontale de Λ^{-} :

$$
\beta = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \psi^{-}(y_1, -\delta)\, dy_1, \quad \delta \in (0, +\infty).
$$

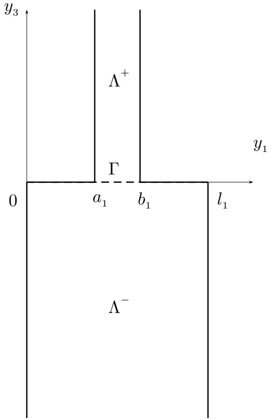

Figure 1: Vertical section of the domain Λ

Proposition. Il existe une unique solution ψ $(= \psi^{\pm}$ dans $\Lambda^{\pm})$. De plus :

- la constante β est indépendante de δ ;
- pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $\delta \in (0, +\infty)$, il existe deux constantes positives c et $c_{\alpha,\delta}$ tel que

$$\left|\partial^{\alpha}\psi^{+}(y_1, y_3)\right| \leq \; c_{\alpha,\delta}\, e^{-cy_3}, \quad (y_1, y_3) \in (a_1, b_1) \times (\delta, +\infty) \;;$$

- pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $\delta \in (0, +\infty)$, il existe deux constants positives c et $c_{\alpha,\delta}$ tel que

$$\left|\partial^{\alpha}(\psi^{-} - \beta)(y_1, y_3)\right| \leq \; c_{\alpha,\delta}\, e^{cy_3}, \quad (y_1, y_3) \in (0, l_1) \times (-\infty, -\delta).$$

Ces estimations sont dites du type de Saint-Venant, voir J.L. Lions *Science Press, 1981*.
Notons que $(\psi^{-} - \beta) \in H^1_{\mathrm{per}}(\Lambda^{-})$.

Corollaire. *Il existe deux constantes positives c and C, indépendantes de ε, tel que*

$$\int_{\Omega_\varepsilon^+} \left| \psi^+ \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \right|^2 dx \leq C\,\varepsilon,$$

$$\int_{\Omega^-} \left| \psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right|^2 dx \leq C\,\varepsilon,$$

$$\int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_\varepsilon} \left| \nabla \left(\psi \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 dx \leq C\, e^{-\frac{c}{\varepsilon}},$$

où $B_\varepsilon = (0, l_1) \times (l_3 - \varepsilon, l_3 + \varepsilon)$, et ψ est la fonction define par $\psi = \psi^-$ dans Λ^- et $\psi = \psi^+$ dans Λ^+.

Développement asymptotique formel

On cherche un développement asymptotique de u_ε dans Ω^- de la forme

$$u_\varepsilon^-(x) = u^-(x) + \varepsilon u_1^-(x) + \varepsilon \phi^- \left(x, \frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) + \cdots$$

où $\phi^- = \phi^-(x, y_1, y_3)$ est l_1-périodique par rapport à y_1.
On impose $\Delta u_1^- = 0$ dans Ω^- et $\Delta_y \phi^- = 0$ dans Λ^-.

Au voisinage de $x_3 = l_3$, en posant $y_1 = \dfrac{x_1}{\varepsilon}$ et $y_3 = \dfrac{x_3 - l_3}{\varepsilon}$, on a

$$\begin{aligned} u^-(x_1, x_3) &= (x_3 - l_3) \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3) + O((x_3 - l_3)^3) \\ &= \varepsilon y_3 \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3) + O(\varepsilon^3 y^3). \end{aligned}$$

Ceci suggère de choisir ϕ^- de la forme

$$\phi^-(x, y_1, y_3) = \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^-(y_1, y_3).$$

Notant $\beta = \lim_{y_3 \to -\infty} \psi^-(y_1, y_3)$, on impose

$$u_1^-(x_1, l_3) = \beta \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3),$$

de sorte que

$$u_\varepsilon^-(x) = u^-(x) + \varepsilon u_1^-(x) + \varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3) \left(\psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right) + \cdots$$

De façon similaire on cherche un développement de u_ε^+ dans Ω_ε^+ et on raccorde les deux développements à l'interface $x_3 = l_3$.

Correcteur de couche limite

Hypothèses pour la régularité de u^- :

$$f \in H^4_{\mathrm{per}}(\Omega^-) \cap L^2(\Omega), \quad b \in H^6_{\mathrm{per}}(0, l_1).$$

Alors $u^- \in H^6_{\mathrm{per}}\left(\Omega^-\right) \subset C^4\left(\overline{\Omega^-}\right)$. Soit w la fonction définie par

$$w = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega^+, \\ w^- & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

où w^- est l'unique solution dans $H^1_{\mathrm{per}}(\Omega^-)$ de

$$\begin{cases} \Delta w^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ w^- = \beta \dfrac{\partial u^-}{\partial x_3} & \text{sur } \Sigma, \\ w^- = 0 & \text{sur } P. \end{cases}$$

Grâce aux hypothèses sur f et b, on a $w^- \in C^3(\overline{\Omega^-})$.

Théorème. *Il existe une constante positive c, indépendante de ε, tel que*

$$\|u_\epsilon - u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus B_\epsilon)} \leq c\,\varepsilon,$$

pour ε suffisamment petit, où $B_\varepsilon = (0, l_1) \times (l_3 - \varepsilon, l_3 + \varepsilon)$.
Si de plus $f = 0$ dans Ω^+, alors il existe une constante positive c, indépendante de ε, tel que

$$\|u_\epsilon - u - \varepsilon w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon \setminus B_\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

pour ε suffisamment petit.

Pour démontrer le théorème on introduit les fonctions suivantes.
Soit $w_\varepsilon^\pm$ des fonctions de $H^1(\Omega_\varepsilon^+)$ et $H^1_{\mathrm{per}}(\Omega^-)$, respectivement, vérifiant

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon^+ = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+, \\ \Delta w_\varepsilon^- = 0 & \text{dans } \Omega^-, \\ w_\varepsilon^+ = 0 & \text{sur } R_\varepsilon \setminus \Sigma, \\ w_\varepsilon^- = \beta \dfrac{\partial u^-}{\partial x_3} & \text{sur } R_\varepsilon \cap \Sigma, \\ w_\varepsilon^- = 0 & \text{sur } P, \\ w_\varepsilon^+ = w_\varepsilon^- - \beta \dfrac{\partial u^-}{\partial x_3} & \text{sur } \Sigma \setminus R_\varepsilon, \\ \dfrac{\partial w_\varepsilon^+}{\partial x_3} = \dfrac{\partial w_\varepsilon^-}{\partial x_3} & \text{sur } \Sigma \setminus R_\varepsilon. \end{cases}$$

Soit τ_ε la fonction définie par

$$\tau_\varepsilon = \begin{cases} \tau_\varepsilon^+ & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+, \\ \tau_\varepsilon^- & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

avec

$$\tau_\varepsilon^+ = u_\varepsilon - \varepsilon w_\varepsilon^+ - \varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+ \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right),$$

$$\tau_\varepsilon^- = u_\varepsilon - u^- - \varepsilon w_\varepsilon^- - -\varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3) \left(\psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right),$$

et on note ρ_ε la fonction définie par $\rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon^\pm$ dans $\Omega_\varepsilon^\pm$, avec

$$\rho_\varepsilon^+ = w_\varepsilon^+ - \varepsilon \frac{\partial w^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+ \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right),$$

$$\rho_\varepsilon^- = w_\varepsilon^- - w^- - \varepsilon \frac{\partial w^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right).$$

La démonstration du théorème sera une conséquence directe des deux propositions suivantes.

Proposition 1. *Il existe une constante positive c, indépendante de ε, tel que*

$$\|\tau_\epsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon,$$

pour ε suffisamment petit.
Si $f = 0$ dans Ω^+, alors

$$\|\tau_\epsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

pour ε suffisamment petit.

Proposition 2. *Il existe une constante positive c, indépendante de ε, tel que*

$$\|\rho_\epsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\,\varepsilon,$$

pour ε suffisamment petit.

Idée de la démonstration de la proposition 1.

Compte tenu des conditions aux limites de u_ε, u, $\psi^\pm$ et $w_\varepsilon^\pm$, et des conditions de saut des dérivées normales de $\psi^\pm$, on a

$$\Delta\tau_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 u^-}{\partial x_1^2 \partial x_3}(x_1, l_3)\psi^+\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right)$$

$$-2\varepsilon \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, l_3)\frac{\partial}{x_1}\left(\psi^+\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right)\right)$$

$$-f \qquad \text{dans } \Omega_\varepsilon^+,$$

$$\Delta\tau_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 u^-}{\partial x_1^2 \partial x_3}(x_1, l_3)\left(\psi^-\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) - \beta\right)$$

$$-2\varepsilon \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1 \partial x_3}(x_1, l_3)\frac{\partial}{x_1}\left(\psi^-\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) - \beta\right) \quad \text{dans } \Omega^-.$$

On a

$$\tau_{\varepsilon|_P} = -\varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\left(\psi^-\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{b(x_1) - l_3}{\varepsilon}\right) - \beta\right),$$

$$\tau_{\varepsilon|_{R_\varepsilon \cap ((0,l_1)\times l_3')}} = -\varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{l_3' - l_3}{\varepsilon}\right).$$

Posons

$$\tau_\varepsilon^1(x_1, x_3) = -\varepsilon \tfrac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\left(\psi^-\left(\tfrac{x_1}{\varepsilon}, \tfrac{b(x_1) - l_3}{\varepsilon}\right) - \beta\right) m_1(x_3),$$

$$\tau_\varepsilon^2(x_1, x_3) = -\varepsilon \frac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{l_3' - l_3}{\varepsilon}\right) m_2(x_3),$$

où m_1, m_2 sont des fonctions de troncature vérifiant

$$m_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t > \dfrac{M + l_3}{2}, \\ 1 & \text{if } t < \dfrac{3M + l_3}{4}, \end{cases}$$

$$m_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } t > \dfrac{l_3 + l_3'}{2}, \\ 0 & \text{if } t < \dfrac{3l_3 + l_3'}{4}, \end{cases}$$

et où $M = \max b$. On vérifie que $\tau_\epsilon - \tau_\varepsilon^1 - \tau_\varepsilon^2 \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon)$, et s'annule sur $R_\varepsilon \cup P$.
Alors, en multipliant l'équation de $\Delta\tau_\varepsilon$ par $\tau_\epsilon - \tau_\varepsilon^1 - \tau_\varepsilon^2$ et en intégrant sur Ω_ε, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla \tau_\epsilon|^2 \, dx \\
&= \int_{\Omega^-} \nabla \tau_\epsilon \nabla \tau_\epsilon^1 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^+} \nabla \tau_\epsilon \nabla \tau_\epsilon^2 dx \\
&\quad + \varepsilon \int_{\Omega^-} \frac{\partial^3 u^-}{\partial x_1^2 \partial x_3} (x_1, l_3) \left(\psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right) \left(\tau_\epsilon - \tau_\varepsilon^1 \right) dx \\
&\quad + 2\varepsilon \int_{\Omega^-} \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1 \partial x_3} (x_1, l_3) \frac{\partial}{x_1} \left(\psi^- \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right) \left(\tau_\epsilon - \tau_\varepsilon^1 \right) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^+} \frac{\partial^3 u^-}{\partial x_1^2 \partial x_3} (x_1, l_3) \, \psi^+ \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \left(\tau_\epsilon - \tau_\epsilon^2 \right) dx \\
&\quad + 2\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon^+} \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1 \partial x_3} (x_1, l_3) \frac{\partial}{x_1} \left(\psi^+ \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \right) \left(\tau_\epsilon - \tau_\epsilon^2 \right) dx \\
&\quad + \int_{\Omega_\varepsilon^+} f \left(\tau_\epsilon - \tau_\epsilon^2 \right) dx.
\end{aligned}
$$

On estime chaque terme du second membre de l'égalité précédente.
Grâce à la décroissance exponentielle de $(\psi^{-} - \beta)$ et ψ^{+}, on a

$$\left|\frac{\partial \tau_\epsilon^1}{\partial x_1}\right| \leq Ce^{-\dfrac{c}{\varepsilon}}, \quad \left|\frac{\partial \tau_\epsilon^1}{\partial x_3}\right| \leq Ce^{-\frac{c}{\varepsilon}} \quad \text{dans } \Omega^{-},$$

$$\left|\frac{\partial \tau_\epsilon^2}{\partial x_1}\right| \leq Ce^{-\frac{c}{\varepsilon}}, \quad \left|\frac{\partial \tau_\epsilon^2}{\partial x_3}\right| \leq Ce^{-\frac{c}{\varepsilon}} \quad \text{in } \Omega_\varepsilon^{+}.$$

Pour les deux premiers termes du second membre, on a

$$\left|\int_{\Omega^-} \nabla \tau_\epsilon \nabla \tau_\epsilon^1 dx + \int_{\Omega_\varepsilon^+} \nabla \tau_\epsilon \nabla \tau_\epsilon^2 dx\right| \leq Ce^{-\frac{c}{\varepsilon}} \left\|\nabla \tau_\epsilon\right\|_{\left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^2}.$$

On montre que chacun des termes suivants (sauf le dernier) est inférieur à

$$C\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\|\nabla \tau_\epsilon\right\|_{\left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^2} + e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right).$$

Pour le dernier terme, on montre que

$$\left|\int_{\Omega_\varepsilon^+} f\left(\tau_\epsilon - \tau_\epsilon^2\right) dx\right| \leq C\left(\varepsilon \left\|\nabla \tau_\epsilon\right\|_{\left(L^2(\Omega_\varepsilon)\right)^2} + e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right).$$

On arrive à

$$\|\nabla \tau_\epsilon\|^2_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} \leq C\left(\varepsilon \|\nabla \tau_\epsilon\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} + e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right),$$

et par suite

$$\|\nabla \tau_\epsilon\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} \leq C\varepsilon.$$

On conclue en utilisant l'inégalité de Poincaré.

Si $f = 0$ dans Ω^+, on obtient

$$\|\nabla \tau_\epsilon\|^2_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} \leq C\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\nabla \tau_\epsilon\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} + e^{-\frac{c}{\varepsilon}}\right).$$

Par suite

$$\|\nabla \tau_\epsilon\|_{(L^2(\Omega_\varepsilon))^2} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}},$$

et on conclue encore, grâce à l'inégalité de Poincaré.

La démonstration de la proposition 2 s'obtient de façon analogue.

Démonstration du théorème. On remarque que

$$u_\epsilon - u - \varepsilon w = \tau_\varepsilon + \varepsilon \rho_\varepsilon + g_\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

où

$$g_\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+ \left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}, \dfrac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \\ +\varepsilon^2 \dfrac{\partial w^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^+ \left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}, \dfrac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \text{ dans } \Omega_\varepsilon^+, \\ \\ \varepsilon \dfrac{\partial u^-}{\partial x_3}(x_1, l_3) \left(\psi^- \left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}, \dfrac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) - \beta \right) \\ +\varepsilon^2 \dfrac{\partial w^-}{\partial x_3}(x_1, l_3)\, \psi^- \left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}, \dfrac{x_3 - l_3}{\varepsilon} \right) \text{ dans } \Omega^-, \end{cases}$$

on obtient ensuite le résultat.

Conclusion. On a une estimation globale y compris dans la couche limite B_ε :

$$\| u_\epsilon - u - \varepsilon w - g_\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c\, \varepsilon^{\frac{3}{2}}.$$

Écoulement de Stokes

La vitesse $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon 1}, u_{\varepsilon 2}, u_{\varepsilon 3})$ et la pression p_ε vérifient les équations de Stokes

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } P \cup R_\varepsilon, \\ (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \ S\text{-periodiques } (\text{en } x'), \end{cases} \tag{1}$$

où le terme source f est dand $\left(L^2(\Omega)\right)^3$, avec

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x' \in S, \ b(x') < x_3 < l_3'\},$$

representant le "domaine limite" quad ε tend vers zero.

L'objectif est d'étudier le comportement asymptotique, quand ε tend vers 0, de la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ de (1) vérifiant $\int_{\Omega^-} p_\varepsilon \, dx = 0$, où

$$\Omega^- = \left\{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x' \in S, \ b(x') < x_3 < l_3\right\}.$$

A l'aide de correcteurs de couche limite, nous construisons une approximation asymptotique de la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ du système de Stokes dans Ω_ε.

Quelques références

Dérivation formelle des lois de paroi (grands nombres de Reynolds) :

1. Y. Achdou, O. Pironneau. Domain decomposition and wall laws, CRAS, 1995.
2. Y. Achdou, O. Pironneau, F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries, J. Comp. Phys., 1998.

Écoulement de Couette flow et applications à la réduction de la traînée (faibles nombres de Reynolds) :

3. Y. Amirat, J. Simon, Influence de la rugosité en hydrodynamique laminaire, CRAS, 1996.
4. Y. Amirat and J. Simon, Riblets and drag minimization, Contemp. Math., 209, AMS, 1997.
5. Y. Amirat, D. Bresch, J. Lemoine and J. Simon, Effect of rugosity on a flow governed by Navier-Stokes equations, Quarterly of Appl. Math., 2001.

Justification de la condition de Navier pour les écoulements laminaires 2-D de Poiseuille et 3D de Couette (nombres de Reynolds modérés) :

6. W. Jäger and A. Mikelić, On the Roughness-induced effective boundary conditions for an incompressible viscous flow, J. Differential Equations, 2001.
7. W. Jäger and A. Mikelić, Couette flows over a rough boundary and drag reduction, Comm. Math. Phys., 2003.

Notons que dans les travaux ci-dessus, l'amplitude et la fréquence des oscillations sont du même ordre ε. Alors que dans le présent travail on étudie le cas d'oscillations très fortes : l'amplitude est fixe (indépendante de ε) et la fréquence est d'ordre ε.

Convergence

On suppose que la fonction b est Lipschitzienne. Notons

$$\Omega_\varepsilon^+ = \{(x', x_3) \in \Omega_\varepsilon : l_3 < x_3 < l_3'\}, \quad \Sigma = S \times \{l_3\}.$$

Pour $m \geq 0$, on introduit l'espace

$$H^m_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon) = \{v \in H^1(A) \text{ pour tout ouvert borné } A \subset \mathcal{O}_\varepsilon,$$
$$v(x + (l_1, 0, 0)) = v(x + (0, l_2, 0)) = v(x) \text{ p.p. } x \in \mathcal{O}_\varepsilon\},$$

où $\mathcal{O}_\varepsilon = \left\{x = (x', x_3) \in \mathbb{R}^3 : x' \in \mathbb{R}^2,\ b(x') < x_3 < \eta_\varepsilon(x')\right\}$.
Soit $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ l'unique solution dans $(H^1_{\mathrm{per}}(\Omega_\varepsilon))^3 \times L^2(\Omega_\varepsilon)$ du système

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur } P \cup R_\varepsilon, \\ \displaystyle\int_{\Omega^-} p_\varepsilon \, dx = 0, \end{cases}$$

où $f \in (L^2(\Omega))^3$.

Soit $(u^-, p^-) \in (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega^-))^3 \times L^2(\Omega^-)$ l'unique solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu\Delta u^- + \nabla p^- = f^- \quad \text{dans } \Omega^-, \\ \nabla \cdot u^- = 0 \quad \text{dans } \Omega^-, \\ u^- = 0 \quad \text{sur } \Sigma \cup P, \\ \displaystyle\int_{\Omega^-} p^- \, dx = 0, \end{array} \right.$$

où $f^- = f_{|\Omega^-}$, et soit

$$u = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{in } \Omega^+, \\ u^- & \text{in } \Omega^-. \end{array} \right.$$

En utilisant des techniques variationnelles classiques et le théorème de Bogovski on montre le résultat de convergence suivant.

Proposition. Notons $\widetilde{u}_\varepsilon$ le prolongement par 0 à Ω de u_ε. Alors, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\widetilde{u}_\varepsilon \to u \quad \text{fortement dans } (H^1(\Omega))^3,$$

$$p_{\varepsilon\,|\Omega^-} \to p^- \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega^-).$$

Décroissance exponentielle

Pour construire une approximation asymptotique de la solution $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$, on considère un problème aux limites auxiliaire dans un domaine vertical infini de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\Lambda^+ = \widetilde{S} \times (0, +\infty)$, $\Lambda^- = S \times (-\infty, 0)$, $\Gamma = \widetilde{S} \times \{0\}$.

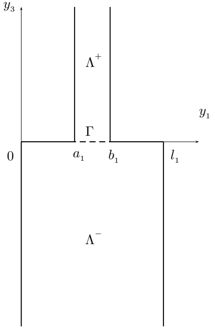

Figure 1: Vertical section of the domain Λ

Pour chaque $i = 1, 2$, on définit les functions $(\Psi^{i,+}, \Pi^{i,+})$ et $(\Psi^{i,-}, \Pi^{i,-})$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^{i,+} \in (H^1(\Lambda^+))^3, \;\; \Pi^{i,+} \in L^2_{\text{loc}}(\Lambda^+), \\ \\ \Psi^{i,-} \in (H^1_{\text{loc, per}}(\Lambda^-))^3, \;\; \nabla \Psi^{i,-} \in (L^2(\Lambda^-))^9, \;\; \Pi^{i,-} \in L^2_{\text{loc}}(\Lambda^-), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nu \Delta \Psi^{i,\pm} + \nabla \Pi^{i,\pm} = 0 \quad \text{dans } \Lambda^\pm, \\ \nabla \cdot \Psi^{i,\pm} = 0 \quad \text{dans } \Lambda^\pm, \\ \Psi^{i,+} = 0 \quad \text{sur } \partial \Lambda^+ \backslash \Gamma, \\ \Psi^{i,-} = 0 \quad \text{sur } (S \times \{0\}) \backslash \Gamma, \\ \Psi^{i,+} = \Psi^{i,-} \quad \text{sur } \Gamma, \\ \sigma(\Psi^{i,+}, \Pi^{i,+}) n = \sigma(\Psi^{i,-}, \Pi^{i,-}) n + \nu e^i \quad \text{sur } \Gamma, \\ \displaystyle\int_{\Lambda^-} \Pi^{i,-} \, dx = 0, \end{array} \right.$$

où

$$H^1_{\text{loc, per}}(\Lambda^-) = \big\{ v \in H^1(\Lambda') \text{ pour tout ouvert borné } \Lambda' \subset \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0) :$$
$$v(x + (l_1, 0, 0)) = v(x + (0, l_2, 0)) = v(x) \text{ pour p.t. } x \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0) \big\},$$

$e^1 = (1,0,0)$, $e^2 = (0,1,0)$, $\sigma(\Psi,\Pi) = -\Pi\,\mathrm{I} + 2\nu\, e(\Psi)$, I est la matrice identité 3×3, $e(\Psi) = \frac{1}{2}(\nabla\Psi + (\nabla\Psi)^{\mathsf{T}})$, et n est la normale unité sur Γ extérieure à Λ^-, i.e. $n = (0,0,1)$.

On note β^i la moyenne de $\Psi^{i,-}$ sur une section de Λ^- :

$$\beta^i(\delta) = \frac{1}{|S|}\int_S \Psi^{i,-}(y',-\delta)\,dy', \quad \delta \in (0,+\infty),$$

où $y' = (y_1, y_2)$.

Proposition. Pour chaque $i = 1,2$, il existe une unique solution (Ψ^i, Π^i) du système de Stokes précédent. De plus,

(i) le vecteur β^i est indépendant de δ, et $\beta^i_3 = 0$;

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^3$ et $\delta \in (0,+\infty)$, il existe deux constants positives c et $C_{\alpha,\delta}$ tel que

$$\left|\partial^\alpha \Psi^{i,+}(y',y_3)\right| + \left|\partial^\alpha \Pi^{i,+}(y',y_3)\right| \le C_{\alpha,\delta}\, e^{-cy_3}, \ \forall (y',y_3) \in \widetilde{S}\times(\delta,+\infty),$$

$$\left|\partial^\alpha (\Psi^{i,-} - \beta^i)(y',y_3)\right| + \left|\partial^\alpha \Pi^{i,-}(y',y_3)\right| \le C_{\alpha,\delta}\, e^{cy_3}, \ \forall (y',y_3) \in S\times(-\infty,-\delta).$$

Développement asymptotique

On suppose que

$$b \in H^6_{\mathrm{per}}(S), \quad f_{|\Omega^-} \in (H^4_{\mathrm{per}}(\Omega^-))^3, \quad f_{|\Omega^+} = 0.$$

Soit $(w^-, q^-) \in (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega^-))^3 \times L^2(\Omega^-)$ l'unique solution de

$$\begin{cases} -\nu \Delta w^- + \nabla q^- = 0 \quad \text{dans } \Omega^-, \\ \nabla \cdot w^- = 0 \quad \text{dans } \Omega^-, \\ w^- = B \quad \text{sur } \Sigma, \\ w^- = 0 \quad \text{sur } P, \\ \displaystyle\int_{\Omega^-} q^- \, dx = 0, \end{cases}$$

où

$$B(x') = \sum_{i=1,2} \frac{\partial u_i^-}{\partial x_3}(x', l_3)\, \beta^i, \quad x' \in S,$$

et β^i est la moyenne de $\Psi^{i,-}$ sur une section de Λ^-. On pose

$$w = \begin{cases} 0 \quad \text{dans } \Omega^+, \\ w^- \quad \text{dans } \Omega^-, \end{cases} \qquad q = \begin{cases} 0 \quad \text{dans } \Omega^+, \\ q^- \quad \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

$$\xi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \xi_\varepsilon^+(x) = \displaystyle\sum_{i=1,2} \frac{\partial u_i^-}{\partial x_3}(x', l_3)\, \Psi^{i,+}\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+, \\ \xi_\varepsilon^-(x) = \displaystyle\sum_{i=1,2} \frac{\partial u_i^-}{\partial x_3}(x', l_3)\, \Psi^{i,-}\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) - B(x') & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

$$\theta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \theta_\varepsilon^+(x) = \displaystyle\sum_{i=1,2} \frac{\partial u_i^-}{\partial x_3}(x', l_3)\, \Pi^{i,+}\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) & \text{dans } \Omega_\varepsilon^+, \\ \theta_\varepsilon^-(x) = \displaystyle\sum_{i=1,2} \frac{\partial u_i^-}{\partial x_3}(x', l_3)\, \Pi^{i,-}\left(\frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_3 - l_3}{\varepsilon}\right) & \text{dans } \Omega^-, \end{cases}$$

où, pour $i = 1, 2$, (Ψ^i, Π^i) est l'unique solution du système de Stokes dans Λ.

On établit le résultat suivant.

Théorème. Il existe une constant C, indépendate de ε, tel que, pour tout $\gamma > 0$ et ε suffisamment petit,

$$\begin{cases} \| u_\varepsilon - u - \varepsilon w - \varepsilon \xi_\varepsilon \|_{(H^1(\Omega_\varepsilon))^3} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2} - \gamma}, \\ \left\| p_\varepsilon - p^- - \varepsilon q^- - \left(\theta_\varepsilon^- - \frac{1}{|\Omega^-|} \int_{\Omega^-} \theta_\varepsilon^- \, dx \right) \right\|_{L^2(\Omega^-)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2} - \gamma}. \end{cases}$$